



ISSN 1590-2595

# quaderni di geofisica

**n. 46**

**APPUNTI DI SISMOMETRIA**

Giovanni Romeo e Thomas Braun

**Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia**

**2006**

**Direttore**

Enzo Boschi

**Editorial Board**

Raffaele Azzaro (CT)

Sara Barsotti (PI)

Viviana Castelli (MI)

Anna Grazia Chiodetti (AC)

Rosa Anna Corsaro (CT)

Luigi Cucci (RM1)

Mauro Di Vito (NA)

Sergio Gurrieri (PA)

Lucia Margheriti (CNT)

Simona Masina (BO)

Nicola Pagliuca (RM1)

Leonardo Sagnotti (RM2)

Salvatore Stramondo (CNT)

Andrea Tertulliani - coordinatore (RM1)

Gianluca Valensise (RM1)

Gaetano Zonno (MI)

**Segreteria di Redazione**

Francesca Di Stefano - responsabile

Tel. +39 06 51860055

Fax +39 06 36915617

Sabrina Palone

Tel. +39 06 51860405

Fax +39 06 51860585

redazionecen@ingv.it

quaderni  
di  
geofisica





# **APPUNTI DI SISMOMETRIA**

Giovanni Romeo<sup>1</sup> e Thomas Braun<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Roma*

<sup>2</sup>*Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia - Osservatorio Sismologico, Arezzo*



## Indice

Introduzione	5
1. Grandezze ed ordini di grandezza	5
2. L'oscillatore armonico meccanico	5
3. Che cosa stiamo misurando?	9
4. Molle e sospensioni	11
5. Un esempio storico, il sismografo Wood-Anderson	14
6. Rivelatori di posizione e velocità	14
6.1. Rivelatore di posizione capacitivo:	15
6.2. Rivelatore di posizione induttivo LVDT (Linear Variable Differential Transformer)	16
6.3. Rivelatore di posizione ottico CCD	17
6.4. Rivelatore di posizione ottico PSD (Position sensitive detector)	17
6.5. Rivelatore di velocità elettromagnetico	18
7. Un caso pratico: il sismografo S13	19
8. Estensione della risposta di un sismografo: il metodo "Lippmann"	20
9. Sismografi a reazione negativa	21
10. Ricette per la reazione negativa	23
10.1. Reazione sulla posizione	23
10.2. Reazione sulla velocità	23
10.3. Reazione sulla accelerazione	23
11. Un esempio pratico: il sismometro STS-1	25
12. Sensori esotici	26
13. Chi davvero volesse conoscere queste cose...	28
14. Bibliografia	28
Appendici	29
A1. Determinazione del coefficiente di smorzamento	29
A2. Determinazione sperimentale del coefficiente di smorzamento	30
A3. Relazione tra la costante del generatore in un trasduttore di velocità elettromagnetico e la CDR (critical damping resistor)	31
A4. Coefficiente di generazione e coefficiente motore	32
A5. Resistenze negative	32
A6. Il metodo di Lippmann applicato all' S13	32
A7. Cenni sulla teoria dei filtri lineari	36
A8. Sismometro come filtro lineare: distribuzione poli-zeri di un sismometro	37
A9. Caratteristiche di alcuni sismografi commerciali	38



## Introduzione

Sembra che vi sia una risposta predefinita alla domanda "Che cosa misura un sismografo?", ed è: "Lo spostamento del terreno!". E la seconda domanda: "Rispetto a che cosa?" fa nascere dei dubbi sulla bontà della prima risposta. Non è possibile effettuare una misura di posizione o di velocità senza avere un riferimento, e un riferimento di posizione è proprio quello che non possiamo permetterci su un pianeta che compie complicati moti in un universo in cui lo star fermi non pare essere la regola. L'unica misura assoluta che possiamo compiere è una misura di accelerazione. Il principio di inerzia enuncia che un corpo in assenza di forze "tende a mantenere il suo stato di quiete o di moto" dove la quiete è uno stato particolare di moto a velocità nulla. La misura delle forze alle quali è soggetto un corpo ci dà, a meno di una costante di proporzionalità (la massa del corpo) l'accelerazione che il corpo subisce. In qualche modo sarà poi possibile ricondurre la misura di accelerazione a delle grandezze di interesse sismometrico. Quando affermiamo che lo scopo di un sismografo è misurare lo spostamento del terreno non commettiamo un errore se assumiamo che il nostro riferimento sia il valore medio della posizione del terreno in un ristretto campo di frequenze. Questa limitazione rende possibile integrare l'accelerazione fissando arbitrariamente quelle costanti di integrazione che portano con sé moti planetari che sono lontani dall'interesse del sismologo.

### 1. Grandezze ed ordini di grandezza

Un sismografo deve misurare il moto del terreno in un certo intervallo di frequenza. Bisogna quindi conoscere questi due parametri (ampiezza e frequenza) per poter progettare lo strumento. La fig. 1 rappresenta in scala bilogarithmica lo spettro del rumore sismico; quello sempre presente, anche in assenza di eventi sismici. È una scala che va dai 0.1 s (10 Hz) misurabili per eventi locali ai 50.000 s delle maree, che ci si aspetta di misurare con una sensibilità di  $10^{-11}$  g e con una dinamica di almeno 5 ordini di grandezza. La costruzione di uno strumento del genere è una sfida che soltanto da pochi anni gli strumenti a larghissima banda (VBB, *very broad band*) riescono a sostenere, suffragati da tecniche di trattamento digitale del segnale senza le quali gli strumenti VBB sarebbero inutilizzabili.

Come verificabile dalla fig. 1 l'energia sismica più alta del rumore del fondo si nota (purtroppo) nella banda di interesse per l'analisi dei terremoti, cioè tra 0.25 Hz e 0.125 Hz, corrispondente a periodi di oscillazione tra 4 e 8 s. Questo picco ben noto ed osservabile su scala globale è causato dalle variazioni di pressione delle onde marine sul terreno ed è quindi chiamato picco dei microsismi (*ocean microseism*), da non confondere con eventi sismici di piccola magnitudo.

Il problema del rumore di fondo ha quindi reso necessario, ai primordi della sismologia, la costruzione di sismografi con una ristretta banda passante e ha portato così alla classica suddivisione in sismografi a breve periodo di 1 Hz (SP, *short period*) e a lungo periodo (15 s, 30 s, 100 s) (LP, *long period*): questa selettività intrinseca nello strumento rendeva possibile concentrare l'interesse sulle frequenze prodotte dall'evento sismico reiettando la maggior parte del fondo, che, se registrato completamente (in assenza di tecniche di filtraggio a posteriori), avrebbe coperto l'evento di interesse.

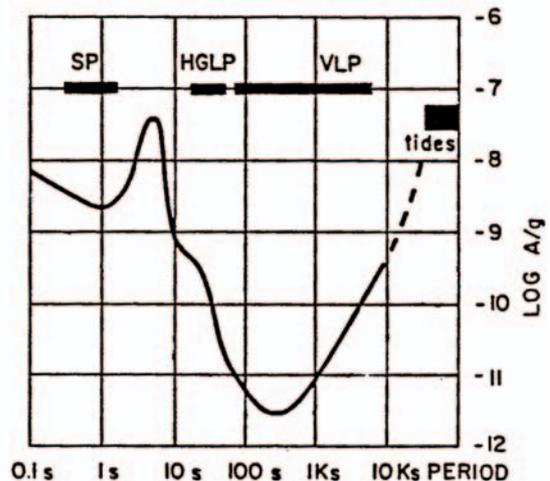


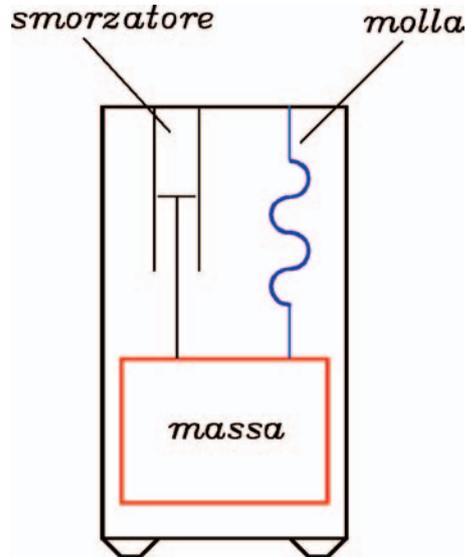
Figura 1 Andamento del rumore sismico.

Questo processo di filtraggio è intrinseco nella ricetta fondamentale per la costruzione dei sismografi: la sospensione della massa sensibile con una forza di richiamo elastica (A6).

### 2. L'oscillatore armonico meccanico

Il sismografo più semplice che possiamo immaginare è costituito da un telaio, collegato rigidamente con il terreno; al telaio, attraverso una molla, è sospesa una massa (fig. 2).

La legge fondamentale della dinamica ci dice che se il sistema è sottoposto ad un'accelerazione, la massa è soggetta ad una forza. La deformazione della molla che sospende la massa è proporzionale alla forza che la molla esercita, e misurando questa deformazione si può risalire all'accelerazione a cui il sismografo è sottoposto.



**Figura 2** Schema semplificato di un sismografo. La massa è libera di muoversi verticalmente sospesa alla molla; lo smorzatore fa estinguere le oscillazioni indotte nel sistema massa-molla.

Abbiamo descritto il sistema in modo eccessivamente semplice. In realtà un sistema massa-molla è un sistema oscillante; il sistema eccitato (immaginiamo che un evento esterno abbia indotto una deformazione della molla) è teatro di continui trasferimenti di energia da energia cinetica (della massa) ad energia potenziale (della molla). La frequenza alla quale avvengono questi trasferimenti di energia è detta frequenza di risonanza del sistema. È possibile smorzare le oscillazioni per esempio immergendo la massa in un fluido viscoso. Esso non ha praticamente effetto sulla massa a riposo, ma agisce opponendosi al moto della massa quanto più questa si muove velocemente.

Una caratteristica dei sistemi oscillanti è che in essi vengono più facilmente indotte delle oscillazioni quando vengono sollecitati con frequenze prossime a quella di risonanza. Un oscillatore armonico è intrinsecamente un filtro (A6), e può essere adoperato per ottenere quella selezione in frequenza che permette di estrar-

re il segnale di interesse dallo spettro del rumore sismico.

La sospensione di un sismografo può essere ottenuta in vari modi: può essere semplicemente una molla, può essere una componente della forza di gravità e può essere una combinazione delle due cose. Questa ultima cosa è sfruttata nelle sospensioni astatiche, dove le risultanti della componente della gravità e della tensione della molla applicate alla traiettoria sulla quale viene vincolata a muoversi la massa sensibile producono una forza di richiamo indipendente dalla posizione della massa. Comunque la forza di richiamo sia ottenuta, essa è generalmente esprimibile come linearmente dipendente dalla posizione, e dà luogo ad un oscillatore meccanico semplice (fig. 6).

Per trovare una risposta alla domanda "Che cosa misura un sismometro?", introduciamo la definizione di due tipi principali di sensori, distinti in funzione del tipo di trasduttore di moto impiegato. Nel primo la grandezza in uscita è lo spostamento relativo massa sensibile-terreno, dei quali fanno parte tutti gli strumenti antichi ad amplificazione meccanica diretta (*Wiechert*) o ottica (*Wood-Anderson*). Nel secondo tipo la grandezza in uscita è la velocità relativa massa mobile-terreno, ottenuta con un trasduttore elettromagnetico (come il *Teledyne-Geotech S13*). La misura della velocità rende l'ampiezza della variabile in uscita linearmente dipendente dalla frequenza. A frequenze elevate un sistema di questo tipo è più sensibile; questo, oltre alla facilità di impiego ha reso questi strumenti comuni in campagna e per l'uso con sismica attiva, dove è appetibile una buona sensibilità alle alte frequenze (100 Hz) sconfinanti nell'acustico (geofoni). In queste pagine adotteremo la convenzione di chiamare "PENDOLO" un sensore con trasduttore di posizione e "GEOFONO" un sensore con trasduttore di velocità. Il termine sismometro verrà usato quando non si vuole evidenziare la differenza tra i due tipi di strumento, o nel caso degli strumenti elettronici.

Nel caso del pendolo si ottiene la massima (minima) ampiezza del segnale sismometrico nel momento in cui anche l'ampiezza dello spostamento relativo massa-telaio raggiunge il massimo (minimo). Nel caso del geofono il segnale è nullo alla massima (minima) ampiezza dello spostamento del terreno (velocità zero) ed è massimo nel momento in cui la massa passa

alla posizione zero (velocità massima).

Un sistema oscillante forzato e smorzato è descrivibile con una equazione differenziale del tipo:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = kax \quad (2.1)$$

forzato significa che non si tratta di un sistema isolato, e che le oscillazioni possono essere indotte dal mondo esterno (è quello che ci serve se vogliamo farci un sismografo!). Nella (2.1) la  $x$  rappresenta la sollecitazione ( $x$  ha le dimensioni di un'accelerazione), mentre la  $y$  rappresenta lo spostamento della massa dalla posizione di riposo. A sinistra del segno di uguaglianza appare il bilancio di tutte le forze agenti sulla massa che possono essere scritte come funzione della variabile  $y$  (spostamento della massa rispetto al telaio). Il primo termine rappresenta la forza legata all'accelerazione per il primo principio della dinamica ( $m$ ,  $[m]$  è la massa sensibile); il secondo rappresenta la forza esercitata dall'attrito viscoso ( $c$ ,  $[m][t]^{-1}$ ) è proprio detto coefficiente di attrito viscoso e descrive una forza frenante proporzionale alla velocità del moto ed opposta ad esso); il terzo esprime la forza di richiamo della molla lineare con la posizione ( $k$ ,  $[m][t]^{-2}$ ) è il coefficiente elastico della molla. A destra del segno di uguaglianza appare la forza indotta da un'accelerazione esterna.

In assenza di sollecitazioni dall'esterno ( $x=0$ ) e in assenza di smorzamento ( $c=0$ ), la (2.1) rappresenta un sistema oscillante di pulsazione  $\omega_0 = (k/m)^{1/2} [t]^{-1}$ . In assenza di sollecitazioni esterne, per tempi lunghi, dopo il transitorio iniziale, i primi due termini della (2.1) scompaiono, e si ottiene:

$$y = ax \quad (2.2)$$

Nel caso di sollecitazione con un'accelerazione costante  $x$  il sistema risponde con uno spostamento  $y$ , ed  $a$  ha dimensione  $[t]^{-2}$ . Per tempi lunghi il sistema è un accelerometro. Questo ribadisce il concetto espresso nell'introduzione: l'unico modo che la natura ha per indurre un movimento relativo della massa rispetto al telaio è un'accelerazione, e, se il sistema sembra, come vedremo, rispondere ad altre sollecitazioni, lo fa perché queste inducono, a loro volta, un'accelerazione.

Per lo studio dei sistemi del secondo ordine vengono generalmente utilizzate le seguenti uguaglianze, che illustrano delle grandezze che

sono particolarmente descrittive del sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

$$\xi = \frac{c}{2 \cdot \omega_0 \cdot m} \quad (2.4)$$

La prima,  $\omega_0$  abbiamo visto esprime la pulsazione propria del sistema, mentre  $\xi$  (coefficiente di smorzamento) è una variabile adimensionale che esprime la capacità del sistema di estinguere le oscillazioni causate da un sollecitazione. L'introduzione delle (2.3) e (2.4) nella (2.1) ne fornisce la versione familiare a chi si occupa di teoria dei sistemi:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 ax \quad (2.5)$$

La risposta ad un'eccitazione a gradino di un sistema descritto dalla (2.5) è data da:

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_0 e^{-\alpha t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (2.6)$$

dove sono stati introdotti i nuovi simboli:

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.7)$$

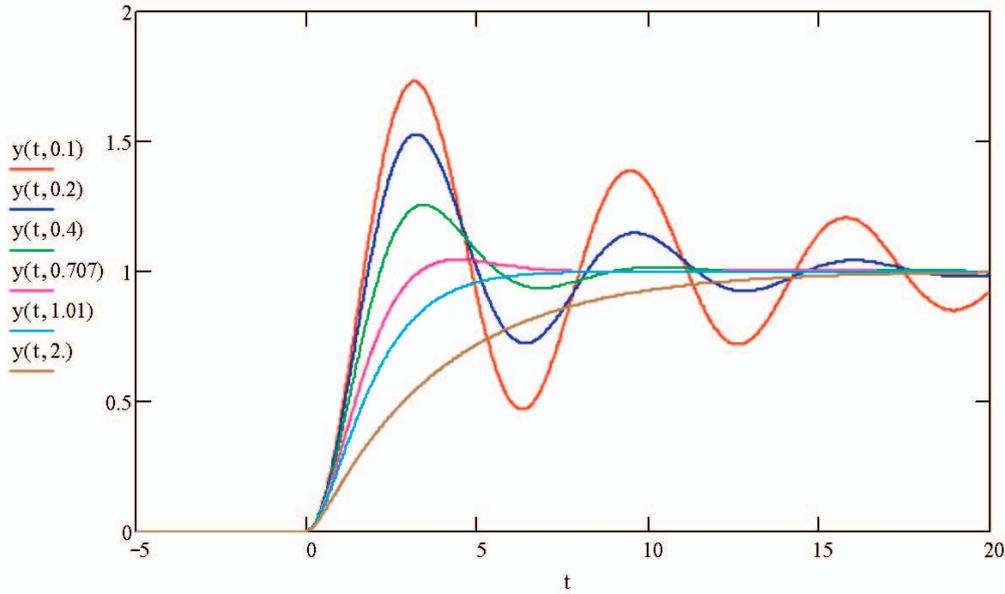
$$\alpha = \xi\omega_0 \quad (2.8)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right) \quad (2.9)$$

Di questi  $\omega_d$  ha un significato particolare: ha le dimensioni di una pulsazione e lo vediamo apparire come argomento del seno nella soluzione dell'equazione; questo significa che quando smorziamo un sistema lo costringiamo ad oscillare più lentamente, e la nuova pulsazione è proprio  $\omega_d$ . Se proviamo a disegnare la (2.6) parametrizzandola in funzione di  $\xi$  otteniamo il diagramma di fig. 3.

Che mostra come  $\xi$  piccoli portino ad un sistema veloce ma con tendenza ad oscillare, mentre  $\xi$  grandi portino ad un sistema non oscillante ma lento a rispondere.

In qualche modo un sismografo è un sistema con un ingresso ed un'uscita. Un modo



**Figura 3** Andamento delle oscillazioni di un sistema del secondo ordine (con pulsazione di risonanza unitaria) forzato con un gradino unitario, e parametrizzato con il coefficiente di smorzamento  $\xi$ .

classico per descrivere il comportamento di un sistema è quello di fornire la sua risposta in frequenza, cioè il comportamento del sistema eccitato con una funzione armonica di ampiezza unitaria e di frequenza variabile in un intervallo abbastanza ampio da essere descrittivo del sistema.

Assumiamo che il nostro sistema sia un pendolo (nell'accezione descritta all'inizio del paragrafo cioè oscillatore meccanico con trasduttore di posizione) e scriviamo la accelerazione che lo eccita come la derivata seconda di uno spostamento  $z$ :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = -a \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (2.10)$$

Per descrivere il comportamento dinamico del sismografo definiamo la funzione di trasferimento  $Q(\omega)$  che rappresenta la risposta del sistema a un'oscillazione periodica di ampiezza unitaria.

$$|Q(\omega)|e^{i\varphi} = Q(\omega) = \frac{\text{Ampiezza d'uscita}}{\text{Ampiezza d'ingresso}} \quad (2.11)$$

Dove  $\varphi$  rappresenta la differenza di fase tra il segnale di ingresso e il segnale di uscita. La (2.10) è un'equazione lineare a coefficienti costanti. Se eccitata con una funzione armonica, risponderà con una funzione armonica con stessa frequenza ma fase ed ampiezza differenti.

Questo rende possibile le sostituzioni:

$$y = Q(\omega)e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

$$z = e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

in questo modo la (2.11) diventa

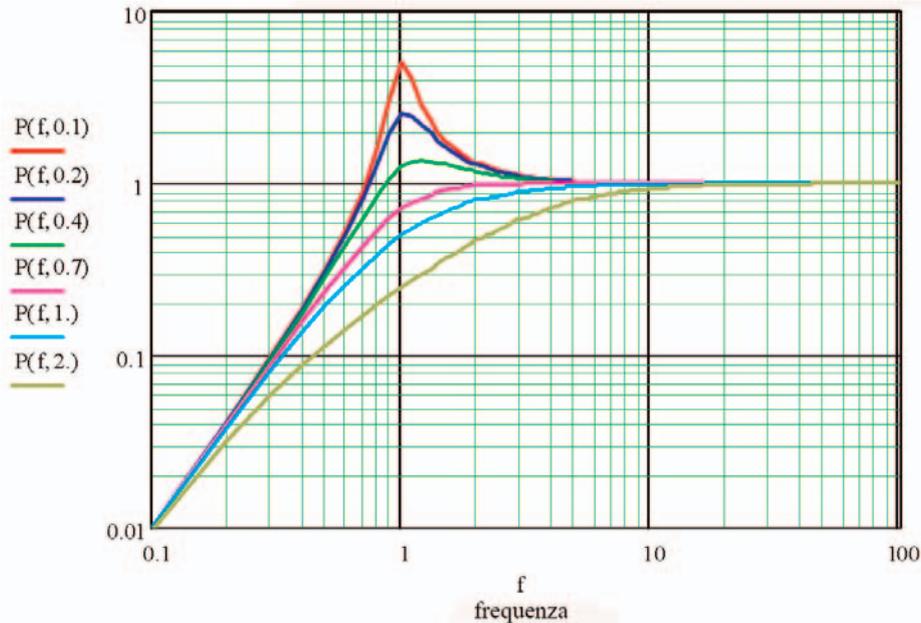
$$Q(-\omega^2 + i2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = a\omega^2 \quad (2.14)$$

$$Q = a \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\xi\omega_0\omega)} \quad (2.15)$$

$$|Q(\omega)| = |a| \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.16)$$

La fig. 4 mostra l'andamento del modulo di  $Q(\omega)$  in funzione della frequenza parametrizzato con vari valori di  $\xi$  (gli stessi che sono stati scelti per la fig. 3.2)

Sono storicamente esistite delle controversie su quale fosse la scelta migliore per il coefficiente di smorzamento. Osservando la fig. 4 si osserva come l'amplificazione intorno alla frequenza di risonanza cresca considerevolmente al diminuire del coefficiente di smorzamento. Questo effetto di amplificazione poteva essere appetibile ai primordi della sismologia, quando non era tanto importante lo studio della forma



**Figura 4** Diagrammi della risposta di un pendolo allo spostamento del terreno ( $P(f, \xi)$ ) al variare del coefficiente di smorzamento.

d'onda, quanto che l'evento venisse rilevato. Con l'affinarsi delle tecniche di analisi si è desiderato uno strumento che ricostruisse il più fedelmente possibile il movimento del terreno.

Il coefficiente  $\xi$  deve essere maggiore di 0 (zero), altrimenti le oscillazioni permangono per sempre, ma non deve essere esageratamente grande, altrimenti il sistema impiega un tempo troppo lungo per il raggiungimento dell'equilibrio (fig. 3). Per ( $\xi = 1$ ) il sistema smette di oscillare e si dice che ha smorzamento critico. Un sistema sottosmorzato ( $0 < \xi < 1$ ) tende ad oscillare e risponde all'eccitazione con delle oscillazioni più alte dell'eccitazione stessa (sovralongazione), ma risponde più rapidamente. Il contrario succede con un sistema sottosmorzato.

In funzione del sistema che si sta progettando si può prediligere una differente scala di  $\xi$ . Esistono diverse ricette analitiche per trovare il miglior coefficiente di smorzamento. Essenzialmente si basano sul desiderio di non avere sovralongazione, e di rendere minimo l'errore della risposta in frequenza rispetto ad un sistema ideale. Se definiamo l'errore come:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} \|I(\omega) - |Q(\omega)|\| d\omega \quad (2.17)$$

dove  $I(\omega)$  è la risposta del sistema ideale e  $Q(\omega)$  è la risposta del sistema in esame, possiamo calcolare che la funzione errore  $E(\xi)$  ha un minimo in corrispondenza di

$$\xi \approx 0.6 \quad (2.18)$$

Ad un altro, importante, risultato si giunge se imponiamo che il sistema non abbia sovralongazioni, il che equivale a dire che la funzione di trasferimento  $Q(\omega)$  non può mai superare la funzione di riferimento  $I(\omega)$ ; questo si verifica per  $\xi \geq 1/\sqrt{2}$ . L'appendice A1 riporta alcune formulazioni relative alle considerazioni precedenti ed altre considerazioni di ordine pratico.

### 3. Che cosa stiamo misurando?

Una volta conosciuto il valore dei parametri che descrivono l'oscillatore meccanico è possibile, almeno teoricamente, il calcolo del movimento del terreno a partire da misure accurate della posizione della massa rispetto al telaio (A5). La difficoltà pratica è essenzialmente rappresentata dall'inadeguatezza delle misure della posizione e dal rumore strumentale che copre livelli di segnale bassi ma essenziali ad una deconvoluzione corretta. Se riformuliamo la domanda "che cosa stiamo misurando?" come "che risposta dà un pendolo (geofono) sollecitato ad una particolare frequenza da un segnale di accelerazione velocità o spostamento?" possiamo tentare di fornire delle risposte che non esigano la deconvoluzione completa del segnale. Trasformando la (2.5) secondo Laplace otteniamo:

$$Y(s) = \frac{a \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot X(s) \quad (3.1)$$

$$Y(s) = F(s) \cdot X(s) \quad (3.2)$$

Avendo definito  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{a \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3.3)$$

La formula appena scritta è nota come funzione di trasferimento di un sistema del secondo ordine. I poli di questa funzione sono:

$$p_{1,2} = -\omega_0 \cdot (\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}) \quad (3.4)$$

e sono complessi coniugati nel caso di  $\xi < 1$ , reali altrove. Questo significa che il sistema ha una soluzione oscillante e sono complessi coniugati nel caso di  $\xi < 1$ , reali altrove. Questo significa che il sistema ha una soluzione oscillante (che poi possa manifestarsi effettivamente una oscillazione viene discusso in A1) per  $\xi < 1$ , ed esponenziale altrove. Il cambiamento del tipo di eccitazione (spostamento, velocità o accelerazione) non cambia il denominatore della (3.1). Abbiamo definito  $Y(s)$  come la risposta (in spostamento) della sollecitazione (in accelerazione) somministrata alla  $F(s)$ . Possiamo riscrivere la 3.2 come:

$$Y(s) = s \cdot F(s) \cdot \frac{X(s)}{s} \quad (3.5)$$

questo non cambia naturalmente le cose, ma ci permette di interpretare la (3.5) in maniera diversa; infatti  $X(s)/s$  rappresenta adesso la velocità del terreno (confronta appendice A5.6), ed allora  $s \cdot F(s)$  diviene la risposta del nostro sistema ad un'eccitazione di velocità.

Una analoga considerazione si può fare per lo spostamento: effettuiamo la stessa operazione ma, questa volta, moltiplichiamo e dividiamo per  $s^2$ . Esaminando il caso di un geofono eccitato con un segnale di accelerazione abbiamo che la funzione di trasferimento  $F(s)$  si arricchisce di uno zero nell'origine a causa della sostituzione del trasduttore di velocità con un trasduttore di posizione, di due zeri nel caso di eccitazione con segnale di velocità e di tre zeri nel caso di eccitazione con segnale di posizione. Queste considerazioni sono riassunte nella tab. 1 e nella fig. 5.

Ingresso	Pendolo	Geofono
Spostamento del terreno $\delta(t)$	fig. 5 Pd, due zeri	fig. 5 Gd, tre zeri
Velocità del terreno $\delta(t)$	fig. 5 Pv, uno zero	fig. 5 Gv, due zeri
Accelerazione del terreno $\delta(t)$	fig. 5 Pa, nessuno zero	fig. 5 Ga, uno zero

**Tabella 1** Zeri delle funzioni di trasferimento di pendoli e geofoni alle varie eccitazioni.

1) Pendolo (pendolo meccanico con trasduttore di spostamento massa-telaio)

a) Eccitazione con spostamento del terreno (2 zeri):

- Al di sotto della pulsazione naturale  $\omega_0$  l'amplificazione è proporzionale alla frequenza ed il pendolo si comporta come un filtro passa-alto del secondo ordine (12 dB/ottava, 20 dB/decade).
- In prossimità della pulsazione naturale il pendolo si comporta come un filtro passa-banda (Il fenomeno è evidente per  $\xi < 1$ ).
- Per pulsazioni maggiori della pulsazione naturale l'amplificazione è costante.

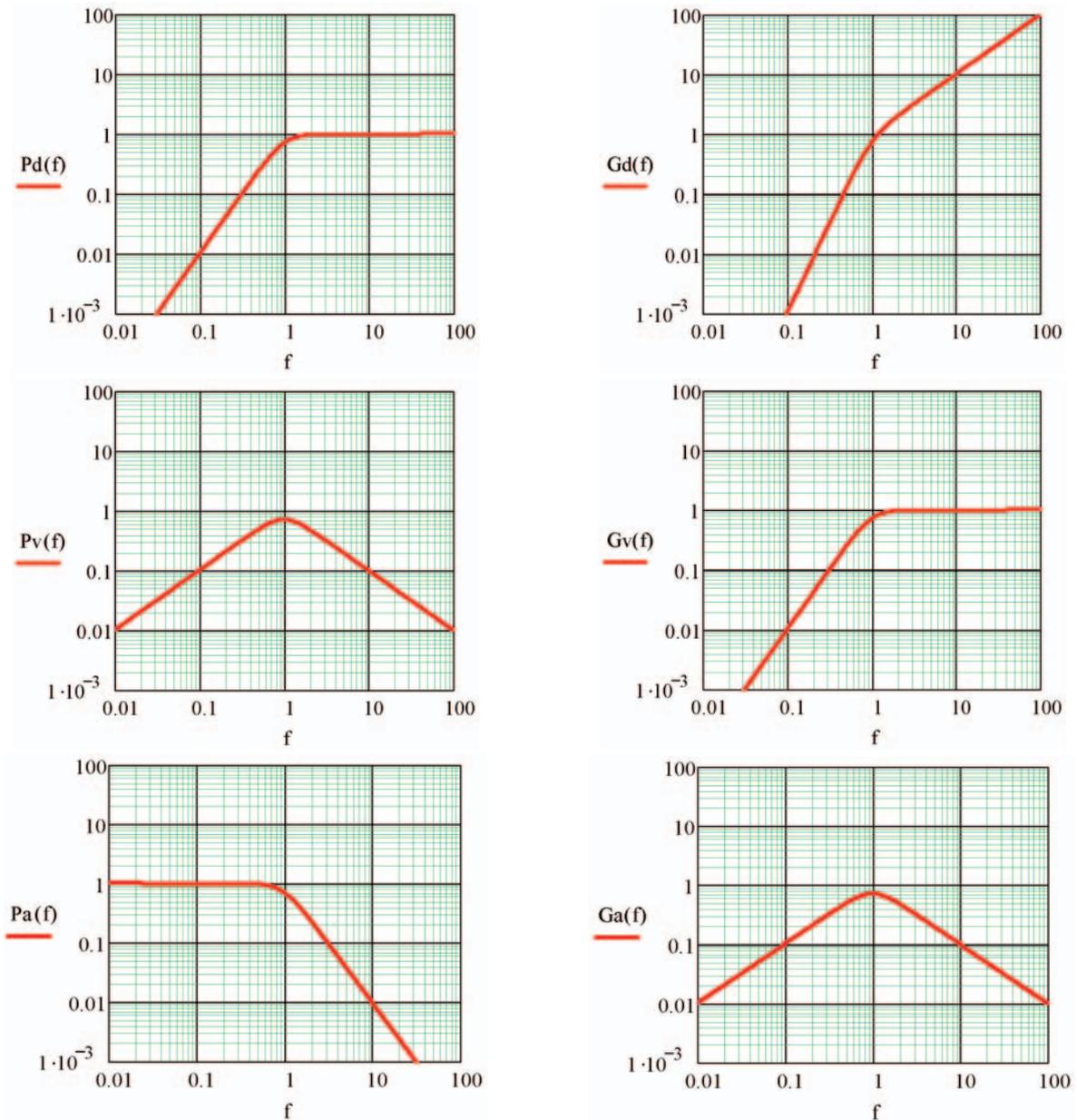
b) Ingresso di velocità (1 zero):

- Il sistema è un filtro passa-banda, e si comporta come un passa-alto (6 dB/ottava) per pulsazioni inferiori alla pulsazione propria di risonanza.
- È come un filtro passa-basso (6 dB/ottava) per pulsazioni superiori alla pulsazione propria.

c) Ingresso di accelerazione (nessuno zero):

- Al di sotto della pulsazione propria la risposta del sistema è proporzionale all'accelerazione: il pendolo si comporta come un accelerometro (e, siccome è relativamente facile costruire pendoli con alta frequenza di risonanza gli accelerometri sono più economici dei sismometri).
- Al di sopra della pulsazione propria il sistema si comporta come un filtro passa-basso con pendenza di 12 dB/ottava.

2) Geofono: pendolo con trasduttore di velocità relativa massa-telaio (esattamente come al punto 1, ma derivato rispetto al tempo)



**Figura 5** Andamento delle funzioni di trasferimento di un pendolo (colonna di diagrammi a sinistra) e di un geofono (colonna di diagrammi a destra) eccitati con segnali di spostamento (prima riga di diagrammi); di velocità (seconda riga di diagrammi) e di accelerazione (terza riga di diagrammi).

a) Ingresso di spostamento (3 zeri):

- La risposta sale rapidamente con la frequenza, ( $60 \text{ dB/decade}$  prima della frequenza propria e  $20 \text{ dB/decade}$  dopo la frequenza propria); questa esaltazione delle alte frequenze può essere utile per evidenziare la sismicità locale;

b) Ingresso di velocità (2 zeri):

- La risposta sale con  $40 \text{ dB/decade}$  prima della frequenza propria, ed è piatta per frequenze superiori alla frequenza propria.

c) Ingresso di accelerazione (1 zero):

- Il sistema è un filtro passa-banda, e si

comporta come un filtro passa-alto ( $6 \text{ dB/ottava}$ ) per pulsazioni inferiori alla pulsazione propria di risonanza.

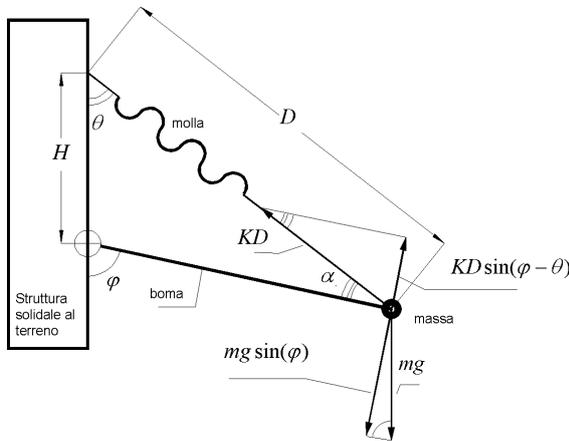
#### 4. Molle e sospensioni

La molla che fornisce la forza di richiamo e tiene la massa in posizione è la componente fondamentale di un sismografo realizzato con un oscillatore armonico semplice. Lo spostamento del terreno è un vettore ed un'unica massa sensibile adeguatamente sospesa potreb-

be misurarlo completamente. Molte ragioni pratiche fanno preferire, con alcune eccezioni, la tecnica di vincolare la massa a muoversi in una sola direzione in modo da costruire un sensore monodirezionale. Tre sensori monodirezionali vengono poi combinati per costruire un unico sensore vettoriale. Generalmente si dispongono tre sensori ortogonali tra loro, uno in posizione verticale, due orizzontali (esistono comunque delle eccezioni a questa regola: il sensore STS-2 è formato da una terna di sensori ortogonali tra loro ma inclinati di  $45^\circ$  rispetto alla verticale).

Benché concettualmente identici sensori verticali ed orizzontali sono profondamente diversi, in un sensore orizzontale non abbiamo vincoli alla scelta della massa e della molla da usare; in un sensore verticale dobbiamo fare una molla abbastanza robusta da tenere la massa sospesa vincendo la forza di gravità, e una molla robusta ha generalmente una costante elastica più grande. In pratica la massa di un sismografo verticale non è mai vincolata direttamente ad una molla, ma il collegamento viene fatto attraverso una geometria che tende ad allungare la frequenza di risonanza a dispetto della costante elastica di richiamo della molla.

Un esempio di strategia di questo tipo è la sospensione *Lacoste* (fig. 6).



**Figura 6** La sospensione *Lacoste*: la massa è vincolata da un'asta (boma) a descrivere una circonferenza attorno ad un punto di vincolo. Si dimostra (vedi testo) che è possibile trovare una condizione di equilibrio tra la componente della gravità e la componente di richiamo della molla sulla direzione del moto in modo che la massa sia in equilibrio indifferente.

In questa geometria la massa è vincolata a muoversi attorno ad un cerchio che ha per rag-

gio la lunghezza del boma. La molla è vincolata da un lato al telaio e dall'altro lato al boma. Le forze in gioco sulla massa (forza di richiamo della molla e forza di gravità) sono proiettate sulla traiettoria che il vincolo impone alla massa.

La proiezione della forza di gravità sulla traiettoria vale:

$$F_{gravita'} = m \cdot g \cdot \sin(\varphi) \quad (4.1)$$

La proiezione della forza della molla vale:

$$F_{molla} = K \cdot D \cdot \sin(\varphi - \theta) \quad (4.2)$$

Dove  $D$  è la lunghezza assunta dalla molla; osservando il triangolo che ha per lati  $D$  ed  $H$  (distanza tra i punti di vincolo della molla e del boma) ed il boma, e ricordando il teorema dei seni, possiamo scrivere  $D$  in funzione di  $H$  e dell'angolo  $\varphi$

$$F_{molla} = K \cdot H \frac{\sin(\pi - \varphi)}{\sin(\varphi - \theta)} \cdot \sin(\varphi - \theta) = K \cdot H \cdot \sin(\varphi) \quad (4.3)$$

Se si uguagliano la forza di gravità e la forza della molla si osserva che, con la condizione:

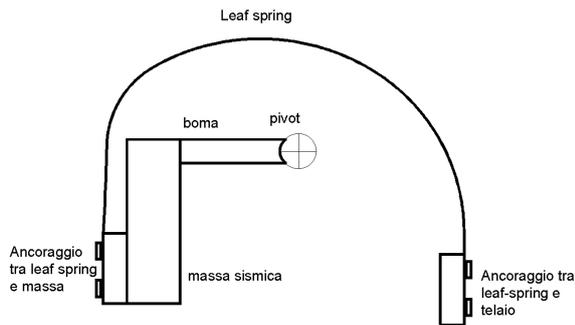
$$m \cdot g = K \cdot H \quad (4.4)$$

la condizione di uguaglianza è rispettata per ogni valore dell'angolo. In realtà, affinché la descrizione appena effettuata funzioni è necessario che sia rispettata una seconda condizione, cioè che la molla sia a lunghezza iniziale nulla. L'aver scritto la forza come  $K \cdot D$  è un'ammissione di questa condizione, infatti il prodotto si annulla per  $D=0$ . In una molla reale questa condizione non è solitamente vera, anche se è possibile costruire una meccanica che ne simuli il comportamento.

Un altro esempio di sospensione paragonabile alla *Lacoste* è la *leaf-spring* (fig. 7).

Il funzionamento non è dimostrabile semplicemente ed il calcolo nelle realizzazioni pratiche si effettua con una ricerca sistematica agli elementi finiti.

La *leaf-spring* è una lamina di metallo, normalmente piana, che assume una particolare forma a causa dei vincoli imposti alle estremità. La caratteristica di questa sospensione è che può essere regolata per fornire una forza in grado di sospendere la massa senza una significativa dipendenza dalla posizione della stessa.



**Figura 7** Sezione di una sospensione *leaf-spring*. La molla è costruita con una unica lama elastica, naturalmente piana, che i vincoli costringono ad assumere la sagoma rappresentata nella figura. Come la sospensione *Lacoste* può essere regolata perché il sistema abbia equilibrio indifferente.

Le sospensioni per i sismografi orizzontali sono naturalmente differenti, perché il movimento della massa è ortogonale alla forza di gravità che quindi non deve essere compensata. Una volta costretta a muoversi solo orizzontalmente (per esempio ancorando la massa ad un boma fissato ad un *pivot* ad attrito nullo che lo vincoli a muoversi su un piano orizzontale), una debolissima forza di richiamo può mantenere in posizione la massa con periodi di risonanza arbitrariamente lunghi.

Con alcune approssimazioni, la frequenza di oscillazione di un pendolo orizzontale è proporzionale al seno dell'angolo formato dal piano sul quale il pendolo si muove con il piano orizzontale (il *pivot* sta più in alto della massa). Se il piano è realmente orizzontale il seno è nullo, la forza di richiamo è nulla e l'equilibrio è indifferente. Possiamo indurre una forza di richiamo e regolarla a piacimento inclinando il sistema. Questo tipo di sospensione è detta *garden-door* ed è attualmente molto utilizzata. In realtà i *pivot* ad attrito nullo (fig. 8) inducono una coppia di richiamo per cui, anche se perfettamente orizzontale, il sistema ha un periodo di risonanza finito. Questo non impedisce di raggiungere un equilibrio indifferente rendendo l'angolo di inclinazione del piano orizzontale negativo (la massa più alta del *pivot*).

Una inclinazione negativa induce una forza di richiamo positiva ( $f = +k \cdot x$ ), che da sola farebbe girare il pendolo verso una delle due estremità della sua corsa) con la quale possiamo compensare l'eccesso della coppia di richiamo indotta dal *pivot*.

L'apparente facilità con la quale si può mettere a punto una sospensione orizzontale non rende più facile costruire dei sismografi orizzon-



**Figura 8** *Pivots* ad attrito nullo. La sospensione si basa sulla flessione di due lame d'acciaio. Per piccoli angoli la coppia di ritorno è lineare con l'angolo e la vita del dispositivo è indipendente dal numero dei cicli.

tali: tutt'altro. Un sismografo orizzontale mostra una sensibilità (fig. 10) a spostamenti dalla verticale di gran lunga superiore a quelli di un sismografo verticale. Le cose sono addirittura peggiori se si utilizza una sospensione *garden-door*, dove l'inclinazione del sismografo appare anche nell'espressione della forza di richiamo.

Nella fig. 9 è stato imposto lo stesso angolo di variazione ad un sismografo orizzontale e ad un sismografo verticale. Già dalla costruzione del disegno si vede come l'effetto indotto dall'inclinazione sia superiore nel sismografo orizzontale che in quello verticale. L'effetto sull'orizzontale va' come il seno dell'angolo di inclinazione

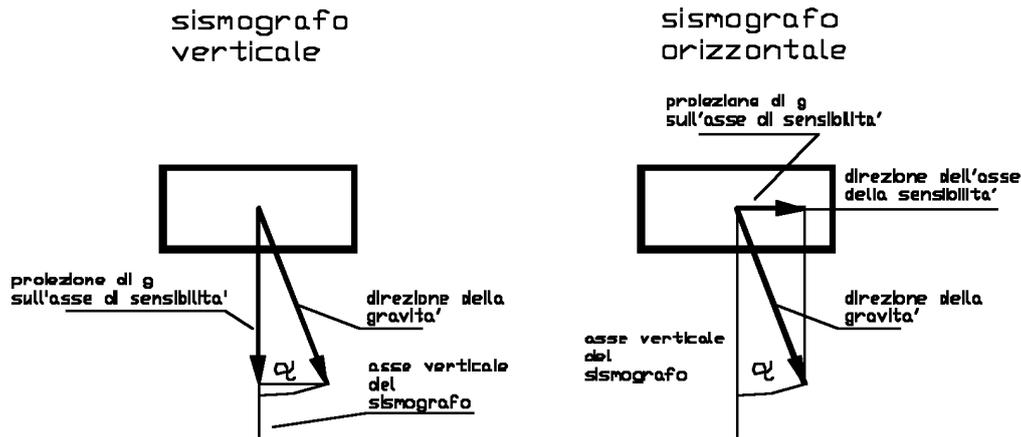
$$a_{orizz} = g \sin(\alpha) \quad (4.5)$$

Mentre per il sismografo verticale la diminuzione della proiezione sull'asse verticale in presenza di un'inclinazione è:

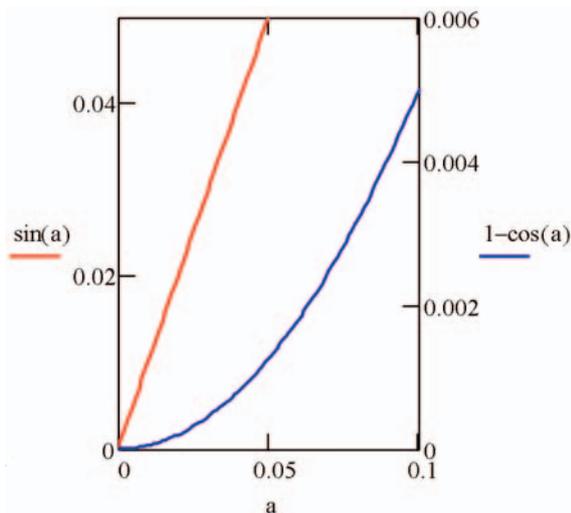
$$a_{vert} = g \cdot (1 - \cos(\alpha)) \quad (4.6)$$

Il diagramma di queste funzioni per piccoli valori di  $\alpha$  (fig. 5.5) mette in rilievo come un sismografo orizzontale risenta molto di più di piccole variazioni dell'inclinazione.

Le sospensioni descritte sono molto interessanti, e potrebbero far vagheggiare la costruzione di un sismografo ideale semplicemente misurando lo spostamento di una massa sospesa in questo modo. La realtà è meno rosea. Lo spostamento di una massa sospesa in equilibrio indifferente è l'integrale doppio nel tempo delle forze che vi agiscono. Questo vuol dire che una forza estremamente piccola agente sulla massa manda inevitabilmente il sistema alla saturazione. Migliorando il sistema possiamo solo rimandare un pochino l'inevitabile. Questo non fa diminuire l'utilità delle sospensioni descritte che aiutano enormemente nel progetto della parte meccanica del sismografo. In pratica chi



**Figura 9** Effetto della variazione dell'inclinazione su un sismografo orizzontale ed un sismografo verticale.



**Figura 10** Andamento delle accelerazioni su un sismografo verticale (linea blu) e su un sismografo orizzontale (linea rossa) per piccole variazioni dalla verticale.

progetta un sismografo può desiderare di diminuire la frequenza di risonanza ( $\omega = (k/m)^{1/2}$ ). La prima cosa che viene in mente è quella di aumentare le dimensioni della massa, ma, per sostenere la massa è necessaria una molla più robusta, che, purtroppo ha una costante elastica più grande; siamo in un circolo vizioso dal quale, però, usciamo facilmente utilizzando le sospensioni descritte.

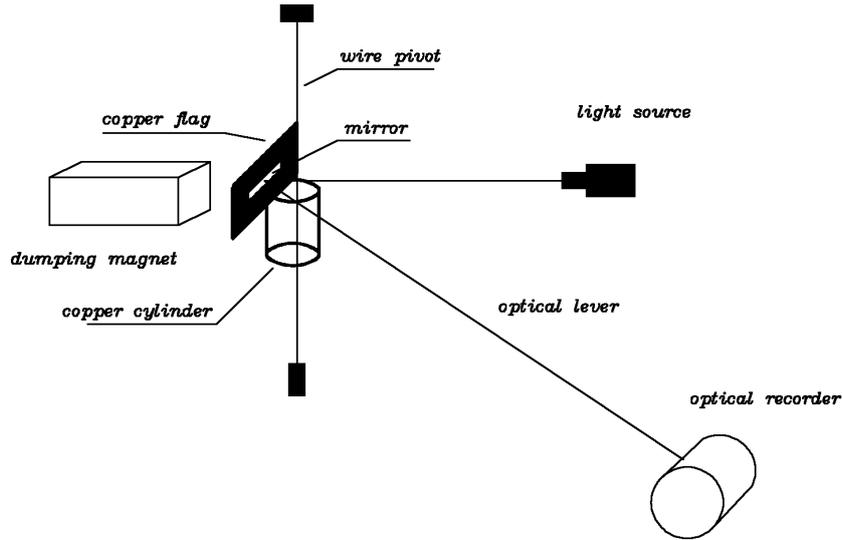
## 5. Un esempio storico, il sismografo Wood-Anderson

Il sismografo *Wood-Anderson* (fig. 11) è un esempio estremamente semplice di sensore sismico orizzontale. L'elemento sensibile è un

piccolo cilindro di rame (buon conduttore amagnetico) sospeso ad un filo teso quasi verticalmente (praticamente l'antenate delle sospensioni *garden-door*); la parte del filo a contatto con il cilindro coincide con una generatrice del cilindro. Il cilindro è libero di oscillare attorno ad una posizione di equilibrio determinata dalla torsione del filo (in minima parte) e dalla forza di gravità. Infatti il filo non è perfettamente verticale, e, regolandone l'inclinazione si regola la componente della forza di gravità sul piano di oscillazione del cilindro. In pratica la posizione di equilibrio e l'intensità della forza di richiamo sono regolabili agendo sull'inclinazione dello strumento rispetto alla verticale. Per essere utilizzabile il sistema deve essere smorzato. Questo è ottenuto con un magnete permanente in prossimità della parte mobile. L'effetto delle correnti di Foucault produce una forza che si oppone al moto del cilindro in modo proporzionale alla sua velocità. La posizione del cilindro era originariamente letta mediante una leva ottica, il cui fulcro era rappresentato da uno specchio solidale con il cilindro, ed il cui braccio terminava sul foglio di carta fotografica di un registratore a tamburo (fig. 11). Nei modelli posti in commercio dalla *Teledyne-Geotech*, per raddoppiare l'ingrandimento senza allungare eccessivamente il braccio della leva ottica, il raggio di luce viene fatto riflettere due volte sullo specchio mobile attraverso una ulteriore riflessione su uno specchietto fisso posto all'interno della custodia dello strumento.

## 6. Rivelatori di posizione e velocità

Dopo aver realizzato il nostro sistema meccanico del secondo ordine, il problema principale è quello di rivelare la posizione della massa sensibile rispetto al telaio. I primi sistemi



**Figura 11.** Il sismografo *Wood-Anderson*.

storicamente utilizzati sono i rivelatori di posizione ad amplificazione meccanica. In questi sistemi una serie di leve trasmettevano, amplificandone lo spostamento, il movimento della massa sensibile a uno (o più) pennini scriventi. Avendo i sismografi delle masse rilevanti (per esempio una tonnellata, nel caso del sismografo *Wiechert*) le forze in gioco erano tali da consentire l'azionamento dei pennini senza perturbare troppo il movimento della massa.

Un rivelatore veramente indolore che (almeno in principio) può consentire amplificazioni arbitrariamente grandi è la leva ottica che abbiamo appena visto nel sismografo *Wood-Anderson*.

Attualmente i sismografi sono dei trasduttori *segnale sismico* → *segnale elettrico*, essi sono divenuti leggeri e compatti e non richiedono particolari cure per l'installazione. Questa evoluzione tecnologica è dovuta allo sviluppo di adeguati trasduttori elettronici. Possiamo classificarli in elettrici (rivelatori a condensatore variabile), magnetici (LVDT, velocimetri magnetici) e ottici (rivelatori di baricentro analogici (PSD) ed *array CCD*).

### 6.1. Rivelatore di posizione capacitivo

La geometria del sensore capacitivo è descritta nella fig. 12

Il sensore è formato da due armature solidali con il telaio, poste a distanza  $d$ , tra le quali è interposta una terza armatura, solidale con la massa mobile (o, in alcuni casi, coincidente con essa). Le due armature fisse sono polarizzate con un segnale alternato, ad una frequenza molto più alta (per esempio  $> 1000$  volte) della frequenza del segnale che si intende rivelare.

Il sistema di tre armature forma un sistema che può essere assimilato a due condensatori in serie  $c_1$  e  $c_2$ ,

$$c_1 = \frac{s}{d - x - a} \quad (6.1.1)$$

$$c_2 = \frac{s}{x} \quad (6.1.2)$$

dove  $s$  esprime la superficie delle armature, assunta uguale per tutte e tre.

Il potenziale sull'armatura mobile  $V_u$  è dato da:

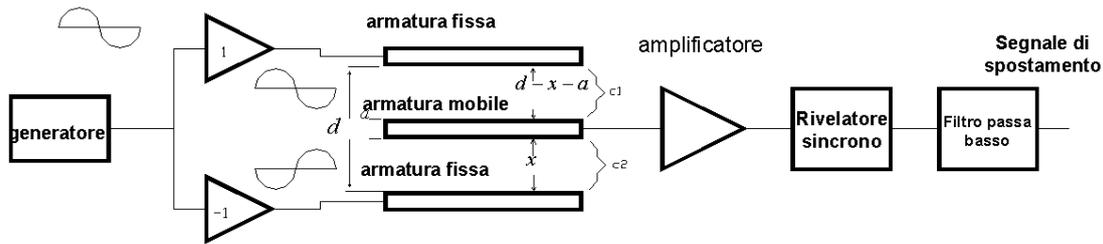
$$2V \frac{Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} + V = 2V \frac{\frac{1}{j\omega \cdot c1}}{\frac{1}{j\omega \cdot c1} + \frac{1}{j\omega \cdot c2}} - V =: \quad (6.1.3)$$

$$= 2V \frac{\frac{x}{s}}{\frac{x}{s} + \frac{s}{d - x - a}} - V = V \left( 2 \frac{x}{d - a} - 1 \right) = V_u$$

che si vede essere una funzione lineare di  $x$ .

Senza scendere nei dettagli della realizzazione elettronica cerchiamo di spiegare il significato dei blocchi di fig. 12. L'amplificatore connesso all'armatura mobile serve per adattare l'impedenza del segnale presente sull'armatura mobile a quello dei circuiti successivi.

Il rivelatore sincrono viene usato per la sua sensibilità alla fase del segnale. Infatti posizioni dell'armatura mobile simmetriche

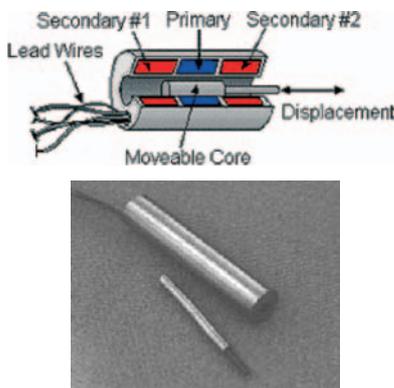


**Figura 12** Rivelatore di posizione capacitivo. Le due armature fisse sono polarizzate con tensione alternata in opposizione di fase. La tensione rivelata sull'armatura mobile è proporzionale alla posizione assunta da quest'ultima (vedi testo).

rispetto al punto di mezzo forniscono valori di tensione identiche in modulo ma opposte in fase. Il segnale in uscita dal rivelatore sincrono possiede ancora una componente a pulsazione  $\omega$ , ed il filtro passa-basso serve a rimuovere tale componente.

### 6.2. Rivelatore di posizione induttivo LVDT (Linear Variable Differential Transformer)

Questo rivelatore di posizione consiste in un trasformatore a nucleo mobile, con un avvolgimento primario e due avvolgimenti secondari, secondo la geometria illustrata nella figura seguente (fig. 13):



**Figura 13** Rivelatore di posizione LVDT. Sopra è mostrato uno spaccato del dispositivo, mentre sotto si vede l'aspetto di un dispositivo commerciale. Il cilindro di dimensioni più piccole è il nucleo mobile.

Come si vede il sistema è perfettamente simmetrico e, se alimentiamo il primario con una corrente alternata, sui due secondari dobbiamo ottenere delle tensioni perfettamente identiche. Se colleghiamo i due secondari in serie in opposizione di fase otteniamo che, con il nucleo al centro la tensione di uscita è nulla. Il nucleo è molto più lungo dell'avvolgimento centrale e, nell'intervallo di spostamento che dobbiamo

misurare, possiamo considerarlo sempre completamente accoppiato con esso. In ogni trasformatore la tensione sull'avvolgimento secondario è proporzionale alla tensione sull'avvolgimento primario ed al rapporto tra il numero delle spire del secondario e del primario. In un trasformatore come quello riportato in figura, il numero delle spire del secondario che possiamo considerare facenti parte del trasformatore sono quelle in corrispondenza del nucleo. Data la simmetria del sistema sono nulli i contributi dovuti all'accoppiamento in aria (senza l'intervento del nucleo) tra gli avvolgimenti, e i contributi dovuti al flusso disperso alle estremità del nucleo (uguale per entrambi le estremità). Siccome gli avvolgimenti sono realizzati in modo che il numero di spire per unità di lunghezza sia costante, la forma della tensione in uscita dal trasformatore è:

$$(6.2.1)$$

$$V_{sec} = V_{prim} \cdot \frac{(n2_{sec} + \phi_d) - (n1_{sec} + \phi_d)}{n_{prim}} =$$

$$= V_{prim} \cdot \frac{x \frac{n}{l} - (-x) \frac{n}{l}}{n_{prim}} = x \frac{2 \frac{n}{l}}{n_{prim}}$$

Dove:

- $\Phi_d$  flusso concatenato con i secondari oltre la fine del nucleo (uguale per le due estremità)
- $V_{sec}$  tensione indotta sul secondario
- $V_{prim}$  tensione sul primario
- $n2_{sec}$  numero di spire del secondo avvolgimento secondario nelle quali è immerso il nucleo
- $n1_{sec}$  numero di spire del primo avvolgimento secondario nelle quali è immerso il nucleo
- $n/l$  numero di spire per unità di lunghezza degli avvolgimenti secondari
- $x$  spostamento del nucleo dal punto centrale

Si vede che la dipendenza dallo spostamento è lineare. L'elettronica richiesta per far funzionare un LVDT è praticamente identica a quella descritta per il rivelatore capacitivo. La sensibilità ottenuta con rivelatori capacitivi raggiunge  $10^{-10}m$ . Con gli LVDT si raggiunge  $10^{-9}m$ .

### 6.3. Rivelatore di posizione ottico CCD

Si tratta di un oggetto inconsueto, sviluppato presso l'INGV per la digitalizzazione di strumenti a leva ottica.

Il tamburo a carta fotografica, viene sostituito da un *array* di sensori ottici. La disponibilità sul mercato di *array* lineari per il mercato dei fax e degli scanner rende questa soluzione economica. Se si usa una luce laser per illuminare il sensore il sistema può essere semplicemente reso immune alla luce ambiente con l'uso di un filtro interferenziale centrato sulla frequenza del laser.

La figura seguente (fig. 14) mostra lo schema a blocchi del primo prototipo realizzato.

Nella figura appare un sensore a 5000 *pixels*. Questo non vuol dire che la risoluzione del sistema sia limitata ad  $1/5000$ . L'elettronica utilizzata assieme al sensore ottico, e l'aver posto un filtro diffusore in prossimità del sensore ha permesso di portare la risoluzione ad  $1/40000$ .

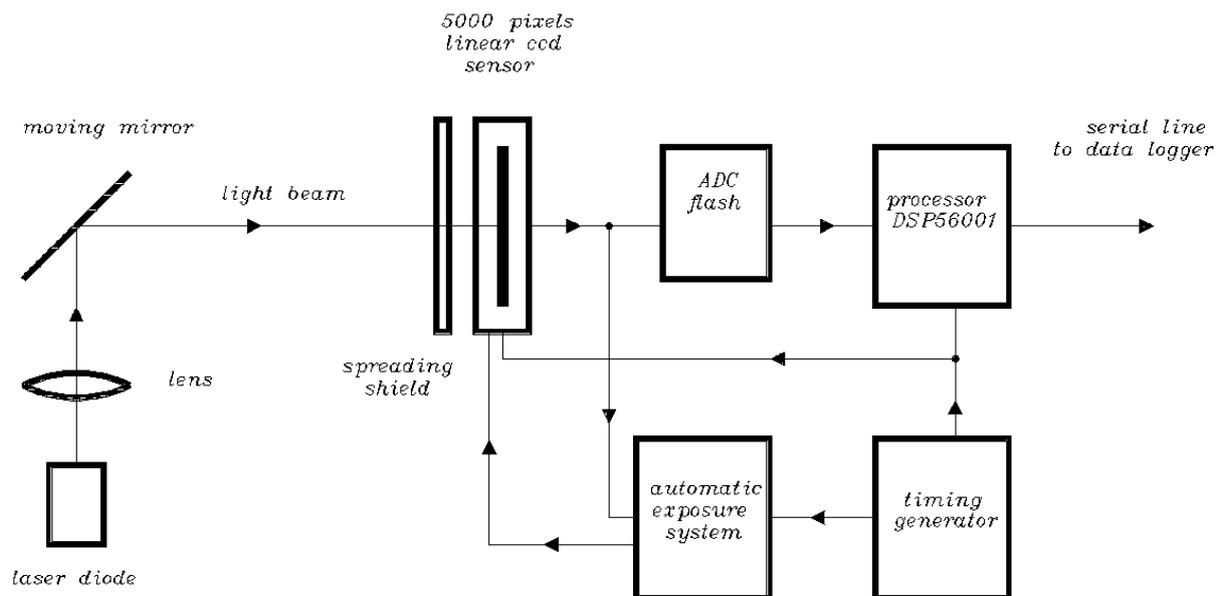
Infatti l'elettronica cerca il punto centrale della distribuzione del punto luminoso sulla superficie sensibile; aumentando le dimensioni del punto luminoso con il filtro diffusore (il cui

effetto è quello di produrre una distribuzione a campana della luce sul sensore) si aumenta il numero di punti sui quali effettuare il calcolo e, quindi, la precisione sul risultato. Tra i sistemi ottici questo fornisce ottimi risultati stabili nel tempo, al prezzo della complessità dell'elettronica. Infatti la bontà della risposta è legata quasi esclusivamente alla geometria del sensore.

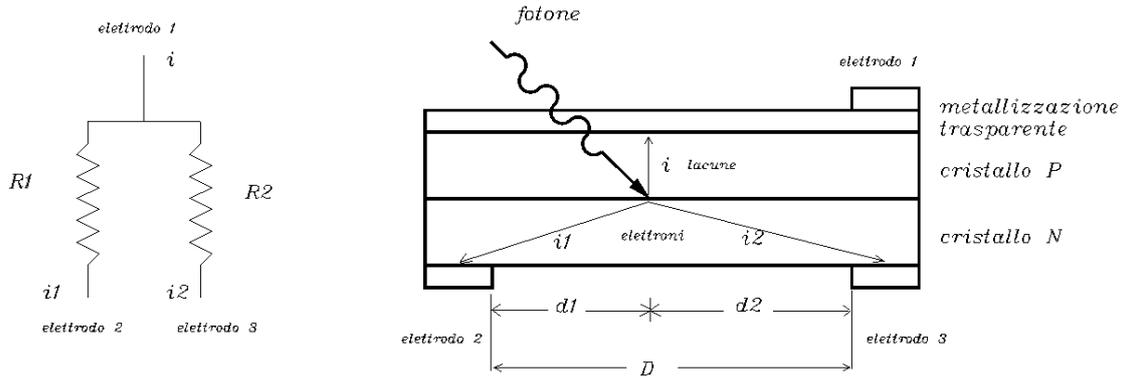
### 6.4. Rivelatore di posizione ottico PSD (Position sensitive detector)

Questi sensori sono in grado di rivelare la posizione del baricentro di un punto luminoso proiettato sulla loro superficie sensibile (fig. 15).

Il meccanismo di funzionamento è estremamente semplice e, sebbene questi sensori non possiedano l'accuratezza di un sensore CCD (la linearità è pessima alle estremità), la facilità d'uso li rende appetibili in molti casi. Il sensore è formato da una lunga giunzione *P-N* (vedi figura) che può essere illuminata attraverso una metallizzazione trasparente. Quando la luce colpisce la giunzione produce dei portatori che danno luogo ad una corrente  $i$ . La corrente che fluisce nel cristallo *P* viene raccolta completamente dalla metallizzazione trasparente, quella che fluisce nel cristallo *N* viene raccolta da due elettrodi posti alle estremità del cristallo attraverso i quali fluiscono due correnti ( $i_1$  ed  $i_2$  con  $i_1+i_2=i$ ). La conduzione attraverso il cristallo, una volta allontanatisi dalla giunzione, è puramente ohmica, e quindi è funzione della



**Figura 14** Schema a blocchi del rivelatore di posizione ottico basato su una CCD. Un microcalcolatore (DSP) calcola il centro della distribuzione della luce sull'elemento sensibile, e fornisce in uscita un risultato numerico.



**Figura 15** Rivelatore di posizione ottico analogico PSD. La posizione del punto luminoso sulla superficie del sensore è funzione dei rapporti delle correnti sugli elettrodi (vedi testo).

distanza degli elettrodi e della conducibilità del cristallo:

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho \cdot d_1 \\ R_2 &= \rho \cdot d_2 \end{aligned} \quad R_1 + R_2 = \rho \cdot D \quad (6.4.1)$$

La seguente formulazione (6.4.2) mostra come dalle correnti sugli elettrodi 2 e 3 sia possibile ricavare il punto di impatto dei fotoni sulla giunzione.

$$\begin{aligned} \frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2} &= \frac{\frac{V}{R_1} - \frac{V}{R_2}}{\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = \frac{\rho \cdot d_2 - \rho \cdot d_1}{\rho \cdot D} \\ &= \frac{d_2 - d_1}{D} = \frac{2 \cdot d_2 - D}{D} \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

### 6.5 Rivelatore di velocità elettromagnetico

Questo rivelatore estremamente semplice si basa sulla legge di Lenz secondo la quale la forza elettromotrice indotta in un circuito è proporzionale alla variazione del flusso magnetico concatenato:

$$f_{em} = - \frac{d\phi(B)}{dt} \quad (6.5.1)$$

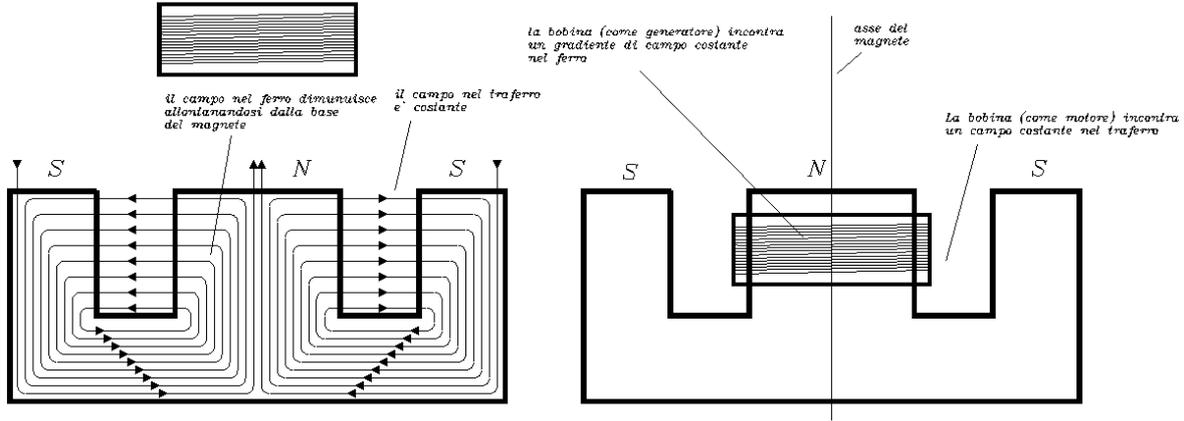
Se si assembla la meccanica in modo che il moto da rivelare produca una variazione lineare del flusso concatenato ad una bobina (fig. 16) abbiamo uno dei più economici ed affidabili trasduttori che siano mai stati pensati. Una implicazione dell'uso di questo tipo di trasduttore è che la forza elettromotrice prodotta può far scorrere una corrente nella bobina che, a sua volta, si traduce in una forza che si oppone al moto

della bobina stessa rispetto al magnete (seconda legge elementare di Laplace)

$$dF = idl \times B \quad (6.5.2)$$

questa forza, dipendente dalla velocità si comporta come una forza di attrito, che può essere regolata a piacimento variando dei parametri elettrici, e può essere utile per portare il sistema oscillante esattamente allo smorzamento critico. La fig. 16 permette di effettuare qualche considerazione su alcuni particolari importanti nella costruzione di un trasduttore di velocità.

La parte a sinistra della figura mostra la disposizione delle linee di campo del magnete permanente. Per convenzione le linee di campo sono più fitte laddove è più intenso il campo magnetico. Chiamiamo *ferro* il corpo del magnete e *traferro* lo spazio tra i poli dello stesso. Il magnete viene costruito in modo che il campo magnetico sia il più omogeneo possibile nel traferro. Questo si traduce in una diminuzione costante del campo nel ferro. Se il campo nel traferro è costante il gradiente del campo nel ferro nella direzione dell'asse del magnete è anch'esso costante. Quando la bobina si comporta come bobina generatrice sfrutta il gradiente lineare nel ferro; se prendiamo come riferimento la figura vediamo che solo la componente verticale del campo magnetico ha effetto sul flusso concatenato con la bobina, e che il campo nel traferro è orizzontale. Quando la bobina si comporta come bobina motrice quello che ha gioco è il campo costante nel traferro. È da notare che l'unica sede di un gradiente del campo magnetico nella direzione dell'asse della bobina è localizzato nel ferro, mentre è nullo nel traferro. Quindi, nella geometria adottata il flusso del campo che attraversa la bobina (usata come generatore) non dipende dalla sezione della



**Figura 16** Rivelatore elettromagnetico di velocità. Il magnete è costruito in modo da avere flusso costante nel ferro (e gradiente costante nel traferro). La figura a sinistra mostra, in alto la bobina e, in basso il magnete, dove sono evidenziate le linee di forza. A destra la bobina è posta nella sua posizione di lavoro. La  $fem$  ai capi della bobina è proporzionale alla velocità con cui la bobina si muove nella direzione dell'asse del magnete.

bobina (l'area della base del cilindro su cui è avvolta). Allo stesso modo (usando la bobina come motore) la forza indotta dal passaggio della corrente non dipende dal diametro della bobina, come farebbe pensare la (14). Infatti, ad un aumento del diametro corrisponde un aumento della lunghezza, ma corrisponde nella stessa misura una diminuzione dell'intensità del campo magnetico.

In pratica si ottiene che, indicando con  $B_0$  il campo nel traferro:

$$B_0 = \text{costante} \quad (6.5.3)$$

Mentre nel ferro la componente verticale del campo (indicando con il segno positivo della variabile  $y$  l'allontanamento dalla base del magnete e con  $y_0$  l'altezza del magnete) risulta:

$$\frac{dB}{dy} = -\frac{B_0}{y_0} \quad (6.5.4)$$

La forza elettromotrice indotta risulta:

$$\frac{d\Phi(B)}{dt} = \frac{dB(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = -\frac{B_0}{y_0} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (6.5.5)$$

La forza indotta dalla corrente nel caso di utilizzazione come bobina motrice:

$$F = i \cdot \frac{B_0}{y_0} \quad (6.5.6)$$

Il rapporto  $B_0/y_0 = G$  appare come coeffi-

ciente del motore e del generatore. Questo ci permette di scrivere in maniera semplice la forza frenante che la bobina esercita in funzione della velocità:

$$F(\dot{y}) = fem(\dot{y}) \cdot \frac{1}{R} \cdot G = \frac{G^2}{R} \cdot \dot{y} \quad (6.5.7)$$

La dipendenza lineare della forza dalla velocità rende possibile considerare la forza come un attrito viscoso da sommare al termine di primo grado nella (3.1). Se consideriamo come unico termine di attrito viscoso quello indotto dalla resistenza elettrica  $R$  e il sistema completamente smorzato ( $\xi=1$ ), otteniamo la formula (A3):

$$G = \sqrt{2 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot R} \quad (6.5.8)$$

Che lega il coefficiente della bobina alla resistenza per ottenere lo smorzamento critico.

## 7. Un caso pratico: il sismografo S13

Il sismografo *S13* (fig. 17) è un bell'esempio di sismometro a traduzione elettromagnetica; la sua costruzione è antecedente al 1973, ma, a dispetto dell'età continua ad essere un buono strumento, soprattutto in virtù della semplicità (si tratta di un sistema massa-molla vicino al caso ideale) che ha il vantaggio di essere facilmente compreso, di essere affidabile e di interporre tra l'osservatore ed il fenomeno da misurare pochi condizionamenti elettronici. Il sistema possiede una massa di 5 kg che soli-

dale al magnete permanente.



**Figura 17** Il sismografo *S13* utilizzato come orizzontale e verticale.

OPERATING CHARACTERISTICS	
<b>Mode of Operation</b>	Convertible-vertical and horizontal
<b>Natural frequency</b>	0.75-1.1 Hz, typical 1 Hz
<b>Tilt</b>	Operates within 4° of vertical at 0.8 Hz
<b>Inertial mass</b>	5.0 kg (11.0 lbs.)
<b>Temperature Range</b>	-51 to +60 °C (-60 to +140 °F)
<b>Transducer</b>	
Type	Moving coil (velocity)
Damping	Electromagnetic
Generator constant	629 V/(m/sec)
Coil resistance	3600 Ws (consult factory for other values)
<b>Maximum Mass Travel</b>	±3.0 mm (0.12 in.)
<b>Calibration Coil Resistance</b>	23 Ws, maximum current 100 mA, calibration coil well separated from the signal coil
<b>Dynamic range</b>	164 dB @ 1 Hz and 184 dB @ 100 Hz

PHYSICAL CHARACTERISTICS	
<b>Dimensions</b>	
Height	38.1 cm (15 in.) over handle
Diameter	16.8 cm (6.63 in.)
<b>Net Weight</b>	10.4 kg (23 lbs.)
<b>Shipping Data</b>	
Weight	13.6 kg (30 lbs.)
Volume	0.036 m <sup>3</sup> (1.3 ft <sup>3</sup> )

Tra le espansioni polari del magnete sono collocate 2 bobine: una bobina trasduttrice di velocità (ai cui capi troviamo una *fem* proporzionale alla velocità della massa sensibile (legge di *Lenz*) ed una bobina motrice che serve per esercitare elettricamente una forza sulla massa mobile (legge di *Laplace*). I parametri che vengono resi noti dalla casa costruttrice sono:

#### Parametri dell'oscillatore meccanico

Massa mobile 5 Kg ±1%  
 Frequenza propria di risonanza regolabile da 0.75 a 1.1 Hz

#### Parametri dei trasduttori

Bobina generatrice (trasduttore velocità)  
 Costante di generazione 629 V/(m/s) ± 2%  
 Resistenza 3600 Ω

#### Bobina motrice (trasduttore corrente-forza)

Costante di mozione 0.1975 ± 2% N/m  
 Resistenza 23 ± 3 Ω

Questo strumento dispone di due sistemi di molle. Uno è utilizzato per contrastare la forza di gravità, l'altro per vincolare la massa a scorrere sulla sua traiettoria e per stabilire il periodo di risonanza; il coefficiente elastico del secondo sistema di molle può essere leggermente modificato dall'utente, mentre il primo sistema di molle può essere rimosso quando si desidera utilizzare lo strumento come sensore orizzontale.

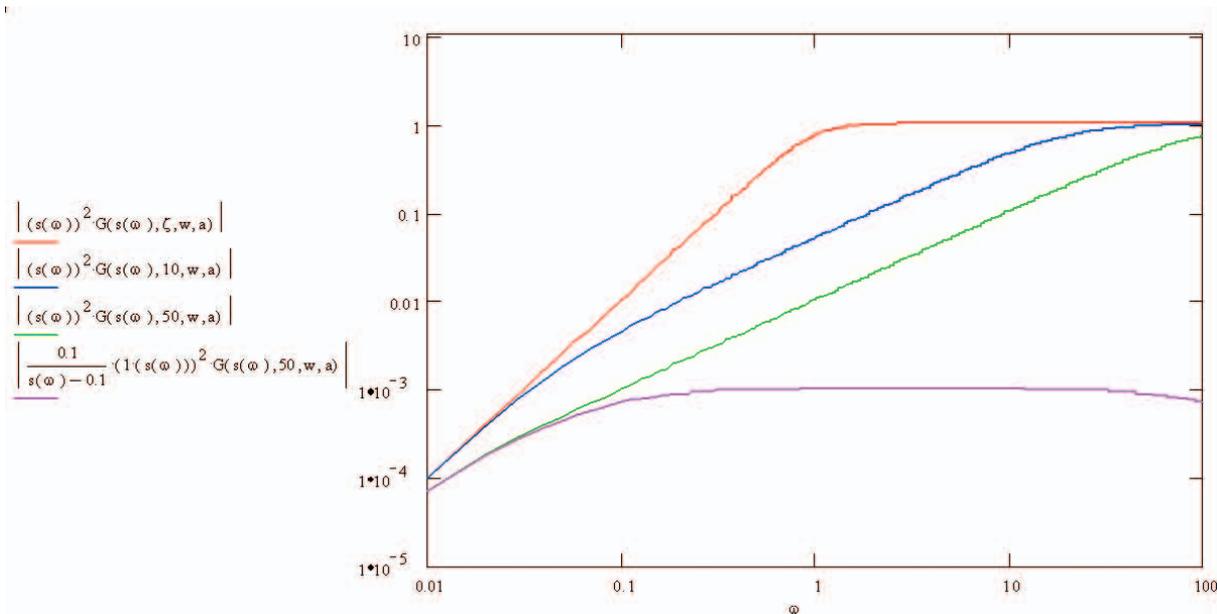
## 8. Estensione della risposta di un sismografo: il metodo Lippmann

La cosa che un progettista cerca di fare quando disegna un sismografo è quello di ottenere uno strumento con una funzione di trasferimento semplice: l'ideale è che l'uscita fornisca una risposta direttamente proporzionale al misurando (spostamento velocità o accelerazione) in un esteso intervallo di frequenza.

La reazione negativa (come vedremo nel prossimo paragrafo) prevale nel campo dei sismometri a larga banda, tuttavia esiste una ricetta che permette di costruire sismografi a banda ragionevolmente grande senza ricorrere, almeno apparentemente, a questo metodo intrinsecamente complicato.

La genialità del metodo Lippmann consiste nella estrema semplicità e nella possibilità di applicarlo ad un sismografo con trasduttore elettromagnetico senza operare alcuna modifica meccanica. La risposta generalmente preferita per un sismografo a larga banda è quella in velocità. La risposta in velocità di un geofono (pendolo meccanico con trasduttore di velocità elettromagnetico) è riportata in fig. 18 (traccia in rosso con  $\xi=1/\sqrt{2}=0.707$ ). Modificando il coefficiente di smorzamento si ottengono delle nuove curve di risposta, sempre riportate in fig. 18.

In fig. 18 appare il diagramma di un geofono per  $\xi=1/\sqrt{2}$ ,  $\xi=10$  e  $\xi=50$ . La curva



**Figura 18** La curva in rosso rappresenta la risposta in frequenza di un geofono ( $\xi=1/2$ ) eccitato con un segnale di velocità. Le curve in blu e verde mostrano come la curva di risposta varia ponendo rispettivamente  $\xi=10$  e  $\xi=50$ . La curva in viola rappresenta la risposta filtrata attraverso un filtro passa-basso con un polo per  $\omega=0.1 \text{ s}^{-1}$ . Dopo questo trattamento la risposta dello strumento diviene piatta sulle velocità in un cospicuo intervallo di frequenza (quasi 3 decadi).

per  $\xi=50$  è particolarmente attraente: è assimilabile ad una retta per circa tre decadi, e la pendenza è tale che può essere facilmente compensata con un circuito  $RC$ . Purtroppo coefficienti di smorzamento così elevati non possono essere facilmente ottenuti. Abbiamo visto nel paragrafo precedente che il coefficiente di smorzamento viene ottenuto, in un geofono, ponendo una resistenza in parallelo alla bobina di trasduzione. Nel caso del sismografo *S13* appena esaminato, possiamo calcolare, a partire dai dati messi a disposizione dalla casa costruttrice:

$$\xi = \frac{G^2}{2R\omega_n M} = \frac{1}{R_{ext} + 3600} \cdot 6300 \quad (8.1)$$

dove  $R_{ext}$  indica la resistenza che possiamo fisicamente porre in parallelo all'uscita del trasduttore di velocità, mentre 3600 (valore in  $\Omega$ ) indica la resistenza della bobina del trasduttore di velocità. Ora vediamo facilmente che anche la più piccola resistenza che possiamo porre in parallelo al sismografo ( $0 \Omega$ ) ci permette di ottenere uno smorzamento  $\xi=1.75$ , ben lontano dai valori in fig. 18. Naturalmente si può immaginare di costruire un avvolgimento ideale (la superconduzione potrebbe venire in aiuto), con delle notevoli difficoltà pratiche. Per ottenere da un *S13* un coefficiente di smorzamento pari a 50 volte la resistenza totale (avvolgimento + resi-

stenza esterna) dovrebbe essere di  $126 \Omega$ . Una resistenza esterna all'avvolgimento capace di portare la resistenza totale a questo valore dovrebbe essere di  $3600 + R_{ext} = 126$ ,  $R_{ext} = -3474$ .

Una resistenza con un valore negativo è certamente un componente esotico, ma non è irrealizzabile (A4). Esistono circuiti elettronici in grado di comportarsi come resistenze negative. Costruendo il circuito corretto e collegandolo alla bobina di trasduzione possiamo ottenere coefficienti di smorzamento arbitrariamente alti. È facile convincersi che, nel rispetto della conservazione dell'energia, una resistenza negativa fornisce energia al circuito dove viene collegata. Un coefficiente di smorzamento alto rende piccola la velocità della massa sensibile del sismografo. In pratica una resistenza negativa è un dispositivo che misura la velocità della massa utilizzando le caratteristiche di generazione della bobina del geofono e la frena utilizzandone le caratteristiche motrici. Si tratta di un esempio di reazione di velocità, che verrà esaminata nel paragrafo successivo, nella quale il dispositivo di misura ed il dispositivo attuatore coincidono.

## 9. Sismografi a reazione negativa

L'introduzione massiccia dell'elettronica anche all'interno dei sensori ha portato alla

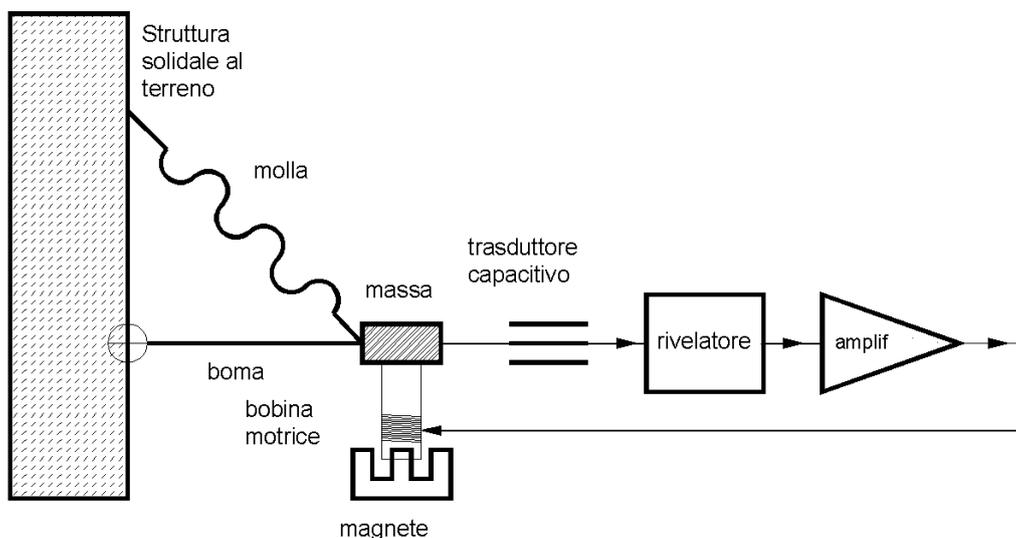
costruzione di strumenti che, a dispetto delle dimensioni ridotte esibiscono caratteristiche eccezionali. Questo viene ottenuto grazie alla reazione negativa. Iniziamo con un discorso qualitativo. Immaginiamo una massa sorretta da una sospensione *Lacoste*, che si trova quindi in equilibrio indifferente.

La posizione della massa viene costantemente letta da un trasduttore di posizione (per esempio un trasduttore capacitivo) e corretta attraverso un trasduttore di forza del tipo magnete permanente – bobina (fig. 19).

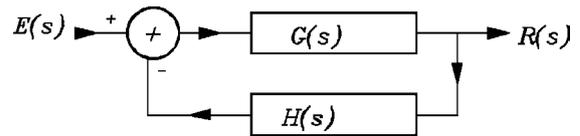
Possiamo immaginare di costruire l'elettronica intorno al sistema in modo che esso reagisca annullando gli spostamenti della massa. Se riusciamo a far questo la forza che il sistema elettronico esercita per mantenere la massa ferma è proporzionale all'accelerazione subita dalla massa, nel modo più semplice, senza insidiose funzioni di trasferimento. La forza appare come una grandezza elettrica (corrente) sulla bobina motrice, e la sua misura ci fornisce una misura dell'accelerazione. Però, se realmente il nostro sistema di reazione riesce a tenere ferma la massa l'aver usato una sospensione pregevole come la *Lacoste* sembra inutile: se la massa sta ferma non sfruttata i vantaggi di una sofisticata sospensione, che può essere sostituita da qualcosa di più semplice.

Queste considerazioni hanno fatto emergere due considerazioni fondamentali:

- L'uso della reazione permette di modificare (estendere) la risposta di un sistema meccanico.
- I difetti di una meccanica povera possono essere compensati da un'elettronica adeguata.



**Figura 19** Sismografo a reazione negativa. Il segnale di posizione della massa ottenuto attraverso un trasduttore capacitivo, viene inviato alla bobina motrice che esercita una forza sulla massa stessa.



**Figura 20** Tipico schema a blocchi di un sistema reazionato;  $G(s)$  è detto ramo diretto, mentre  $H(s)$  è detto ramo di reazione.

Un sistema reazionato può essere rappresentato dallo schema a blocchi (fig. 20).

$G(s)$  è la funzione di trasferimento del ramo diretto,  $H(s)$  è la funzione di trasferimento del ramo di reazione. La funzione di trasferimento di tutto il sistema reazionato è data da:

$$F(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \quad (9.1)$$

Nel caso di un sismografo reazionato il ramo diretto comprende sicuramente la funzione di trasferimento della meccanica, mentre il ramo di reazione è esclusivamente elettronico. Osservando la (9.1) possiamo rifare la considerazione sul miglioramento delle caratteristiche di un sensore meccanico grazie alla reazione. Se  $H(s)$  (e anche parte di  $G(s)$ ) dipendono esclusivamente dalla parte elettronica si può immaginare di progettare  $H(s)$  in modo che  $G(s) \cdot H(s) \gg 1$ . In questo caso  $F(s) = 1/H(s)$ , il che mostra che una opportuna scelta dell'elettronica fa diminuire l'influenza della meccanica.

## 10. Ricette per la reazione negativa

Nel paragrafo precedente si è cercato di giustificare come l'uso della reazione negativa sia vantaggioso per costruire sismografi di qualità a partire da una meccanica modesta. La fig. 20 (e la corrispondente (9.1)) mostrano lo scheletro di un sistema a reazione negativa, mentre la fig. 19 mostra lo schema di principio di un sismografo dove, per la correzione della posizione della massa, viene utilizzato lo stesso segnale di posizione.

La risposta ad un segnale di accelerazione di un pendolo privo di reazione negativa è stato descritto nella (3.1):

$$Y(s) = \frac{a \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot X(s) \quad (10.1)$$

dove  $Y(s)$  rappresenta lo spostamento della massa rispetto al telaio e  $X(s)$  l'accelerazione a cui il sistema viene sottoposto. Esaminiamo che cosa succede introducendo la (10.1) nella formula generale della reazione (10.2)

$$F(s) = \frac{\frac{a \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}{1 + H(s) \cdot \frac{a \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}} = \frac{a \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 + H(s) \cdot a \cdot \omega_0^2} \quad (10.2)$$

Il risultato della (10.2) è una formula praticamente identica alla (10.1), alla quale viene aggiunto un termine  $H(s) \cdot a \cdot \omega_0^2$ .  $H(s)$  è, a sua volta, una funzione di trasferimento che assumiamo operi sul segnale di spostamento. A seconda della forma assunta da  $H(s)$  la funzione di trasferimento ad anello chiuso ha dei comportamenti diversi.

### 10.1. Reazione sulla posizione

In questo caso  $H(s) = b$  (costante) ed il termine  $b \cdot a \cdot \omega_0^2$  va a sommarsi al termine  $\omega_0^2$  che è quello che descrive la forza di richiamo della molla. Modificando il valore di  $b$  modifichiamo la forza di richiamo del nuovo sistema. Può essere interessante notare che la costante di richiamo della nuova "pseudo-molla" può essere, in questo caso, modificata arbitrariamente in segno e intensità. Se si mantiene il segno per avere una reazione negativa (il sistema si oppone agli spostamenti),

il coefficiente della molla può essere aumentato; Se si cambia il segno la reazione aiuta gli spostamenti e la forza prodotta agisce contro la molla, fino ad annullarne gli effetti. Abbiamo prodotto elettronicamente una sospensione astatica. Aumentare la reazione oltre questa condizione di uguaglianza porta il sistema all'instabilità: quanto più la molla è lontana dalla posizione centrale, tanto più tende ad allontanarsene.

La fig. 21 mostra la risposta in frequenza di un sistema reazionato al variare del guadagno dell'anello di reazione. L'aumento apparente della rigidità della molla causa un aumento della frequenza di risonanza, una diminuzione del guadagno ed una diminuzione del coefficiente di smorzamento, in accordo con la formula (3.1) e le successive.

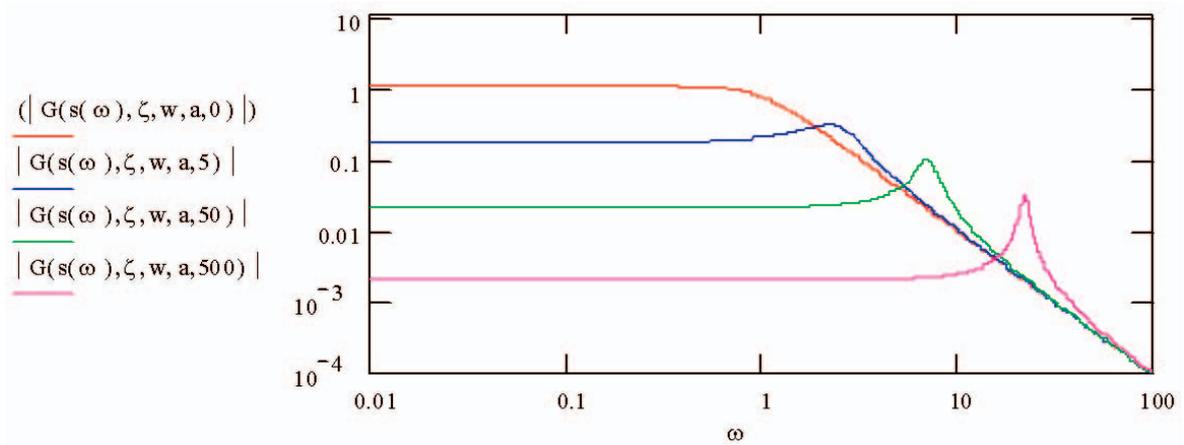
### 10.2. Reazione sulla velocità

In questo caso  $H(s) = b \cdot s$ , ed il termine  $s \cdot b \cdot a \cdot \omega_0^2$  va a sommarsi al termine  $2\xi\omega_0 s$ , che descrive il termine di attrito viscoso: una reazione sulla velocità permette di modificare elettronicamente il termine di smorzamento.

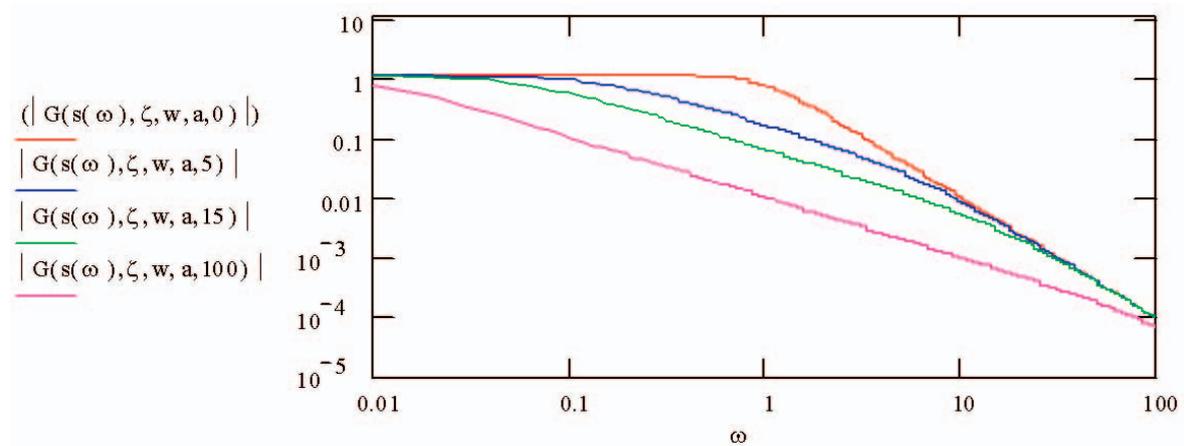
La fig. 22 mostra la risposta di un sistema reazionato sulla velocità al variare del guadagno della reazione. La cosa notevole è che se si considera la risposta alle velocità del terreno di un pendolo con reazione sulla velocità della massa rispetto al telaio otteniamo un diagramma che mostra una zona di risposta piatta alle velocità che incrementa all'aumentare dell'entità della reazione. Ad esempio, se prendiamo un sismografo come l'appena descritto *SI3*, preleviamo il segnale dalla bobina di trasduzione e lo portiamo indietro alla bobina motrice, otteniamo una reazione sulla velocità; un integratore (o meglio un quasi integratore con  $F(s) = 1/(s+a)$ ) all'uscita della bobina di trasduzione trasformerebbe l'*SI3* in un sismografo a larga banda con risposta piatta sulle velocità (in realtà una soluzione di questo tipo è improponibile a causa dell'esiguo valore del coefficiente forza/corrente della bobina motrice).

### 10.3. Reazione sulla accelerazione

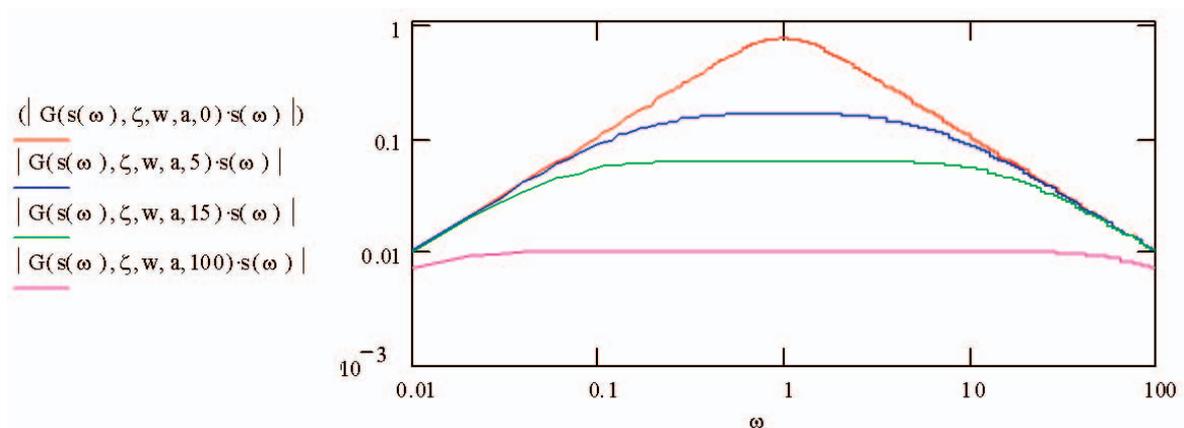
In questo caso  $H(s) = b \cdot s^2$ , ed il termine  $s^2 \cdot b \cdot a \cdot \omega_0^2$  va a sommarsi al termine  $s^2$ , che descrive la forza esercitata dalla massa a causa dell'accelerazione. Una reazione sull'accelerazione ci permette di controllare elettronicamente l'entità apparente della massa dell'oscillatore ad anello chiuso. Nella fig. 24 è riportata la risposta in frequenza di un pendolo con reazione di accelerazione. I picchi che denotano la frequenza di risonanza si spostano verso sinistra all'aumentare del parametro  $b$ , mentre contemporaneamente diminuisce il coefficiente di smorzamento.



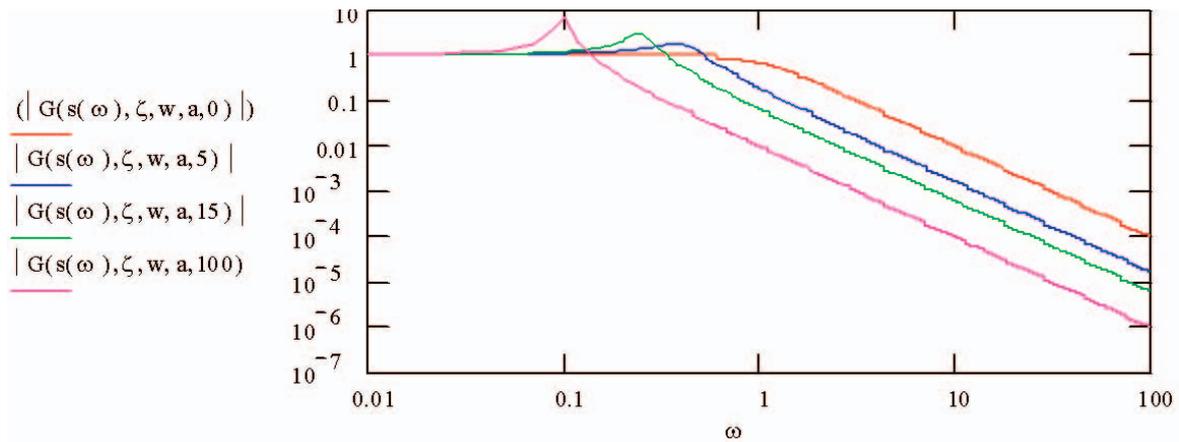
**Figura 21** Risposta di un sistema con reazione sulla posizione parametrizzato con il coefficiente di guadagno di reazione.



**Figura 22** Risposta di un sistema con reazione di velocità parametrizzato con il coefficiente di guadagno di reazione.



**Figura 23** Risposta alla velocità di un sismografo con reazione negativa sulla velocità.



**Figura 24** Risposta all'accelerazione di un sismografo con reazione negativa sull'accelerazione.

### 11. Un esempio pratico: il sismometro STS-1

L'*STS-1* è un esempio di sismometro a reazione negativa. Una massa di 600 grammi è sospesa con una *leaf-spring*, posta nel vuoto e schermata magneticamente ed elettricamente. In questo modo la massa è sospesa indisturbata in equilibrio indifferente; non esiste un termine di smorzamento (non c'è aria) e non esiste la forza di richiamo (grazie alla *leaf-spring*). In pratica nella (3.1) scompaiono i termini contenenti spostamento e velocità.

Molto generosamente (cosa che purtroppo non avviene ormai quasi più) *Wielandt* e *Streckeisen* hanno pubblicato la descrizione completa e dettagliata del loro sismografo (fig. 25).

Nella figura, come ci aspettavamo, non viene evidenziato alcun sistema oscillante meccanico (grazie alla *leaf spring*), ma in compenso c'è un fantasioso sistema di retroazione, che cerchiamo di analizzare. Per far questo riproponiamo la fig. 20 con uno schema a blocchi più tradizionale (fig. 26).

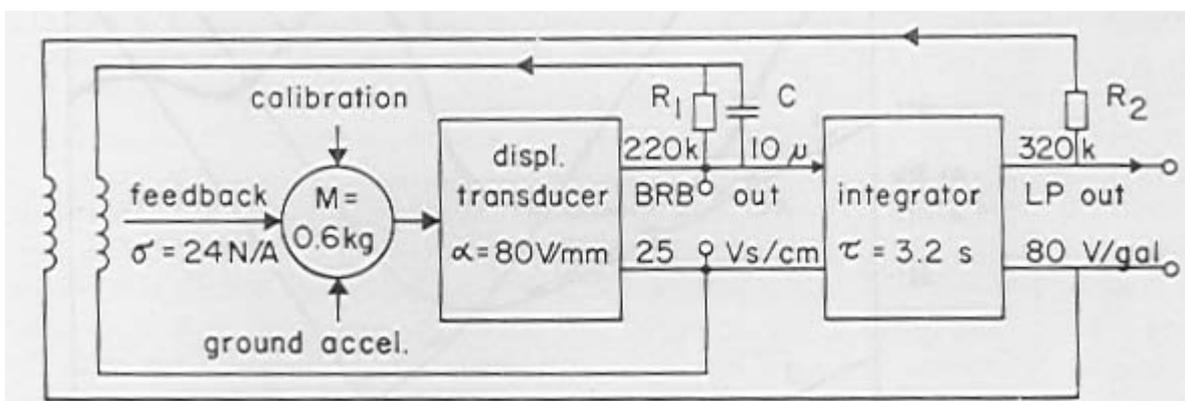
I differenti colori dei tratti che collegano i vari blocchi indicano la grandezza fisica in gioco in quel punto del diagramma. Come ingresso del sistema si è preso lo spostamento del terreno. Nel caso della *leaf-spring* (sospensione indifferente) questo è lecito. Il blocco  $-1$  indica che un movimento di ascesa del terreno causa uno spostamento di discesa della massa rispetto al telaio. Un altro blocco che influenza lo spostamento della massa è il convertitore corrente forza costituito dalla bobina motrice. In questo blocco avviene una trasduzione corrente spostamento nel seguente modo:

Essendo la massa sospesa in equilibrio indifferente l'equazione che ne governa il moto può essere scritta come:

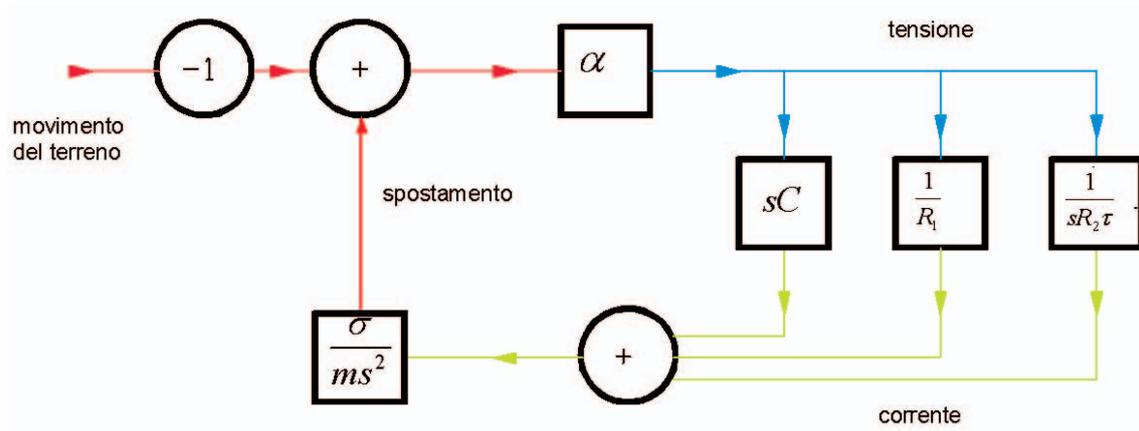
$$F = m \cdot a \Rightarrow \sigma \cdot i(t) = m \cdot \ddot{x}(t) \quad (11.1)$$

Passando alla trasformata di Laplace:

$$\sigma \cdot I(s) = m \cdot s^2 \cdot X(s) \quad (11.2)$$



**Figura 25** Schema di principio del sismografo *STS-1*.



**Figura 26** Schema del principio del sismografo *STS-1* disegnato con blocchi funzionali. Le grandezze fisiche che vengono trasferite dai vari blocchi appaiono in colori diversi: in rosso gli spostamenti, in blu le tensioni ed in verde le correnti.

$$\frac{X(s)}{I(s)} = \frac{\sigma}{m \cdot s^2} \quad (11.3)$$

I blocchi  $s \cdot C$ ,  $1/R_1$  e  $1/(s \cdot R_2 \cdot \tau)$  sono dovuti ai componenti elettrici. Se decidiamo che l'uscita del nostro sistema è la  $BRB_{out}$  di fig. 25, abbiamo (vedi fig. 20).

$$\begin{aligned} C &= 10 \cdot 10^{-6} F \\ \sigma &= 24 N/A \\ a &= 80.000 V/m \\ \tau &= 3.2 s \\ R_1 &= 220.000 \Omega \\ R_2 &= 320.000 \Omega \end{aligned}$$

$$G(s) = \alpha \quad (11.4)$$

$$H(s) = \frac{\sigma}{m \cdot s^2} \left( sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sR_2\tau} \right) \quad (11.5)$$

Combinando la (11.4) e la (11.5) secondo la (9.1) otteniamo:

$$F(s) = \frac{-\alpha}{1 + \alpha \cdot \frac{\sigma}{m \cdot s^2} \left( s \cdot C + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{s \cdot R_2 \cdot \tau} \right)} \quad (11.6)$$

$$F(s) = \frac{s^3 \cdot \frac{m}{\sigma \cdot C}}{s^3 \frac{m}{\alpha \cdot \sigma \cdot C} + s^2 + s \frac{1}{R_1 \cdot C} + \frac{1}{\tau \cdot R_2 \cdot C}} \quad (11.7)$$

La  $F(s)$  è la risposta allo spostamento del sismografo *STS-1*. La risposta alla velocità, è  $F(s)/s$ . I valori reali delle grandezze che compaiono nel sistema sono:

$$M = 0.6 \text{ kg}$$

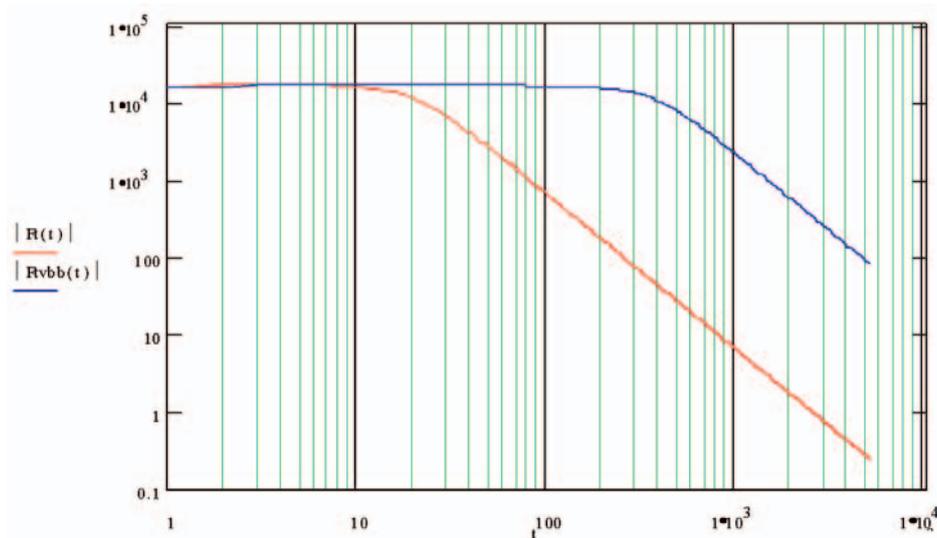
Nella fig. 27 è riportato il diagramma dell'attenuazione in funzione del periodo (cosa inconsueta per coloro che si occupano di elettronica, ma familiare ai sismologi) per la (11.7) con i valori assegnati (in rosso) e per valori modificati aumentando il valore di  $R_1$  di 18 volte ed il valore di  $\tau$  di  $18^2$  volte (in blu).

Il diagramma continuo mostra una risposta piatta sulle velocità fino a 20 s, quello modificato risponde fino ad oltre 300 s. Questa risposta è quella detta *VBB (Very Broad Band)* verso la quale i sismografi tendono ad evolversi.

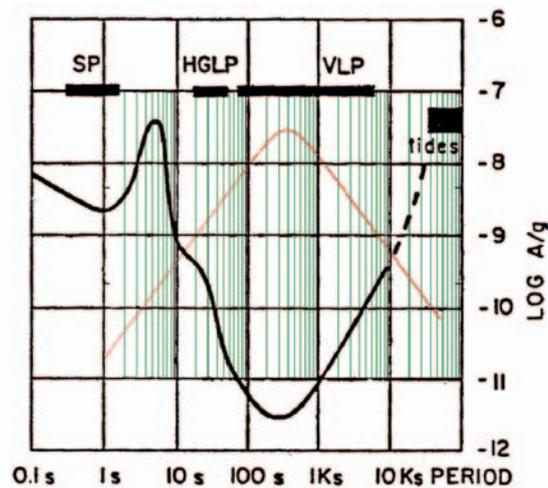
Ancora una considerazione sulla risposta del sismografo *STS-1-VBB*. Il plot della funzione  $F(s)/(s^2)$  fornisce la risposta in accelerazione dello strumento. Questo diagramma è stato disegnato e sovrapposto al diagramma del rumore sismico (come mostrato nella fig. 1). Il risultato è riportato nella fig. 23. Si può notare come la risposta del sensore sia stata progettata perché il massimo della sensibilità corrisponda al minimo del rumore sismico.

## 12. Sensori esotici

Tra i trasduttori di velocità, ne esiste uno (non citato precedentemente) che promette di dare vita ad una generazione di nuovi sismometri. Si tratta del trasduttore *MET (Molecular Electronic Transfer)*, un metodo elettrochimico



**Figura 27** Diagramma della risposta in frequenza dei sismografi *STS-1* (rosso) ed *STS-1 VBB* (blu).



**Figura 28** La risposta in accelerazione di un sismografo a larga banda confrontato con lo spettro in accelerazione del rumore sismico.

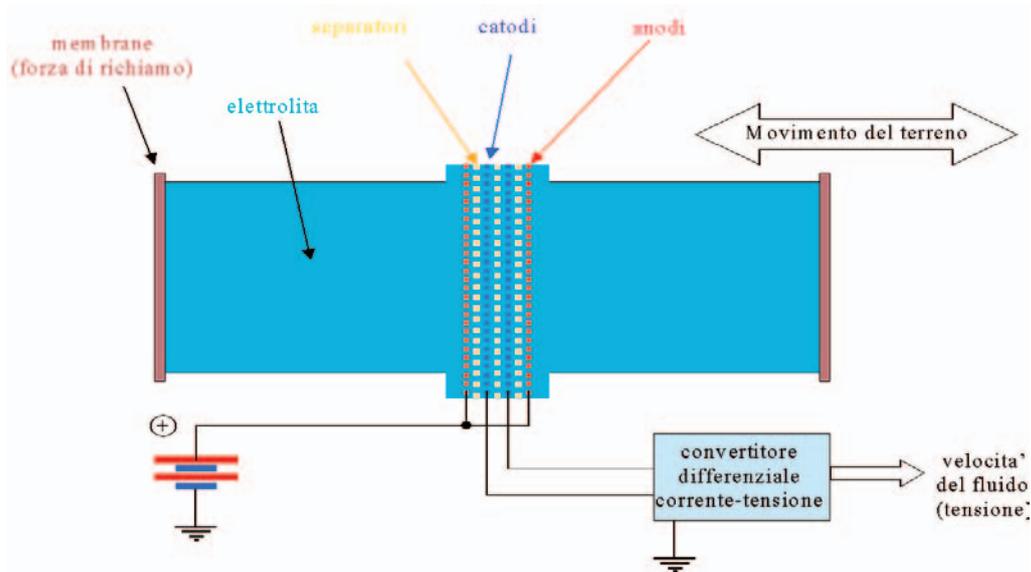
che permette di costruire trasduttori di velocità. Due coppie di elettrodi (reticoli di materiale chimicamente inerte) sono disposti secondo lo schema di fig. 29 ed immersi in una soluzione elettrolitica. La corrente fornita agli anodi dalla sorgente per la polarizzazione (una pila nel disegno) fluisce, attraverso i catodi, nel convertitore corrente tensione ad ingresso differenziale. La simmetria di costruzione del sistema fa sì che le correnti sui due catodi siano identiche, e l'uscita del convertitore differenziale sia nulla. Questo avviene in assenza di moto del fluido. Se il fluido è in movimento il flusso della corrente viene modificato da un apporto (o sottrazione) meccanico di portatori, e la differenza di corrente, ora non nulla, viene rivelata dal convertitore differenziale tensione-corrente. Poiché la quantità di portatori messi in gioco nel tempo è proporzionale alla velocità del fluido, il tra-

sduttore elettrochimico si comporta come un trasduttore lineare di velocità.

Nonostante l'inconueta tecnica realizzativa il dispositivo in fig. 29 è un pendolo con trasduttore di velocità, analogo al pendolo meccanico massa-molla-trasduttore elettromagnetico. La massa è ovviamente il liquido che riempie il recipiente; lo smorzamento è fornito dall'attrito del liquido lungo le pareti del recipiente ed attraverso gli elettrodi ed i setti porosi; la forza elastica di richiamo è fornita dalle membrane alle estremità del recipiente contenente il liquido.

La sua risposta è quella descritta nel diagramma  $I_{gv}(f)$  della figura 5.

Anche su questa singolare ricetta di sismometro si possono operare allargamenti di banda come quelli descritti in precedenza. Sfruttando il grande guadagno di conversione tensione/velocità ed il basso rumore intrinseco



**Figura 29** Esempio di trasduttore MET applicato ad un sismografo. Il recipiente visualizzato in una sezione passante per l'asse di sensibilità è riempito con un elettrolita e trattenuto alle estremità da due membrane elastiche. La velocità del moto del liquido è rivelata dall'insieme di elettrodi che costituisce il trasduttore MET (vedi testo).

dei trasduttori MET, si può utilizzare una versione supersmorzata per ottenere l'appiattimento della risposta alle velocità (come descritto nella fig. 18), tecnica adottata dalla russa CME. Un modo originale di operare un *feedback* di velocità (adottato dalla americana PMD) è quello di esercitare una forza sul fluido con tecnica magneto-idrodinamica. Un campo magnetico ortogonale all'asse del sismografo fa sì che una corrente (ortogonale sia all'asse che al campo magnetico) eserciti una forza lungo l'asse del sismografo. Collegando l'uscita del convertitore differenziale ad un generatore controllato di corrente otteniamo un *feedback* di velocità, ed un comportamento come quello descritto in fig. 23.

### 13. Chi davvero volesse conoscere queste cose...

...potrebbe consultare il sito:

[http://www.ifg.tu-clausthal.de/java/seis/scal\\_app\\_e.html](http://www.ifg.tu-clausthal.de/java/seis/scal_app_e.html)

Sono anche molto istruttivi i siti delle ditte:

<http://www.geoinstr.com>

<http://www.kinometrics.com>

<http://www.lennartz-electronic.de>

[http://www.passcal.nmt.edu/instrumentation/Sensor/sensor\\_info.html](http://www.passcal.nmt.edu/instrumentation/Sensor/sensor_info.html)

un pò più avari di informazioni i siti:

<http://www.cmesci.rbcmail.ru>

<http://pmdsci.home.att.net>

### Bibliografia

La bibliografia sull'argomento trattato è estremamente vasta, perciò possiamo suggerire delle letture sicuramente illuminanti (siamo stati illuminati anche noi):

Horowitz and Hill, *The art of electronics*. Cambridge University Press.

Scherbaum, F. (1996), *Of poles and zeros : fundamentals of digital seismology*. Modern Approaches in Geophysics: v. 15). Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, Boston, London) 255 pp.

Usher, M.J., R.F. Burch and C. Guralp (1979), *Wideband feedback seismometers*, Physics of earth and planetary interiors 18, pp. 38-50.

Usher, M.J., C. Guralp and R. F. Burch (1978), *The design of miniature wideband seismometers*, Geophys. J. R. Astr. Soc. 55, 605-613

Wielandt, E. and G. Streckeisen (1982), *The leaf-spring seismometer: design and performance*, Bull. Seis. Soc. Am., vol. 72, No 6, pp. 2349-2367.

## Appendici

### A1. Determinazione del coefficiente di smorzamento

Coefficiente di smorzamento. Quale la scelta migliore? Sono analizzati alcuni metodi che forniscono risultati simili (ma non identici). Tutte le considerazioni che facciamo qui sono relative ad un pendolo pilotato con un segnale di accelerazione.

#### Errore minimo sulla funzione di trasferimento (modulo)

Si definisce una funzione di riferimento  $I(\omega)$  che rappresenta il sistema ideale, ed una funzione di errore, proporzionale al modulo della differenza della funzione di trasferimento,  $Q(\xi, \omega)$ , e del riferimento, integrata su tutte le frequenze:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} |I(\omega) - Q(\xi, \omega)| d\omega \quad (A1.1)$$

ponendo  $I(\omega) = 1$  la funzione di errore diviene:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \right| d\omega \quad (A1.2)$$

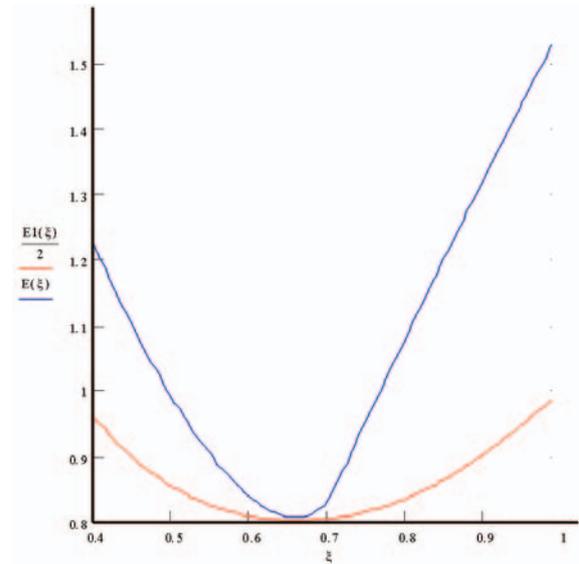
#### Errore minimo sulla risposta al gradino unitario (modulo)

Analogamente alla funzione precedente  $E_i(\xi)$  rappresenta l'errore totale valutato dal confronto della risposte nel tempo del sismografo rispetto al gradino eccitante ( $1$  per  $t > 0$ ).

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} \left| 1 - \left( 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) \right) \right| dt \quad (A1.3)$$

L'integrazione di  $E_i(\xi)$  e di  $E(\xi)$  è stato

effettuato numericamente (la presenza del valore assoluto rende gli integrali discontinui e la loro integrazione analitica difficile), ed i risultati sono rappresentati nella fig. A1. Naturalmente il risultato numerico non è privo di errori, ma è confortante che nei limiti dell'errore i due minimi coincidano ( $\xi=0.67$ ).



**Figura A1** diagramma delle funzioni di errore (minimo modulo) della funzione di trasferimento e della risposta all'impulso in funzione del coefficiente di smorzamento.

#### Errore minimo su funzione di trasferimento e risposta (valore quadrato)

Se modifichiamo le funzioni di errore sostituendo al valore assoluto il quadrato, otteniamo:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \right)^2 d\omega \quad (A1.4)$$

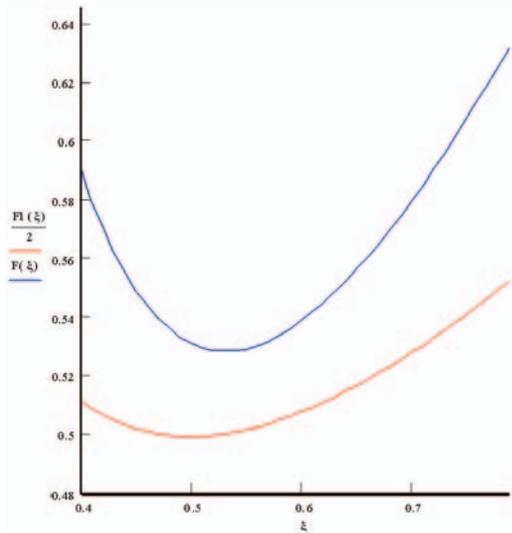
$$E(\xi) = \int_0^{\infty} \left( 1 - \left( 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right) \right) \right)^2 dt \quad (A1.5)$$

Le cui rappresentazioni grafiche, ottenute numericamente sono riportate in fig. A2.

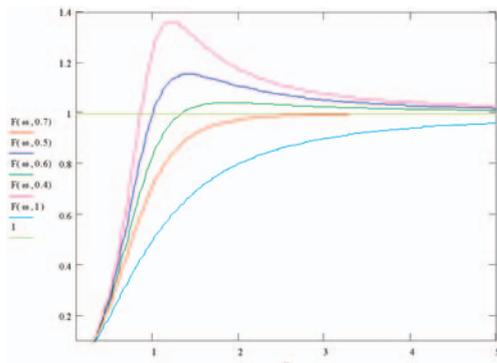
Per la  $F(\xi)$  si può trovare una soluzione analitica

$$F(\xi) = \frac{-1}{4\xi(-1+\xi^2)} \left( 1 - \xi^2 \cos \left( 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right) \right) + \sqrt{1-\xi^2} \sin \left( 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right) \cdot \xi \quad (A1.6)$$

Per la quale si può mostrare la presenza di un minimo in  $\xi=0.5$  (come mostrato in fig. A2).



**Figura A2** Diagramma delle funzioni di errore (minimo quadrato) della funzione di trasferimento e della risposta all'impulso in funzione del coefficiente di smorzamento.



**Figura A3** La rappresentazione in scala bilineare della funzione di trasferimento evidenzia la presenza dei massimi ed il loro spostamento verso le alte frequenze all'aumentare del coefficiente di smorzamento.

### Assenza di massimi della funzione di trasferimento

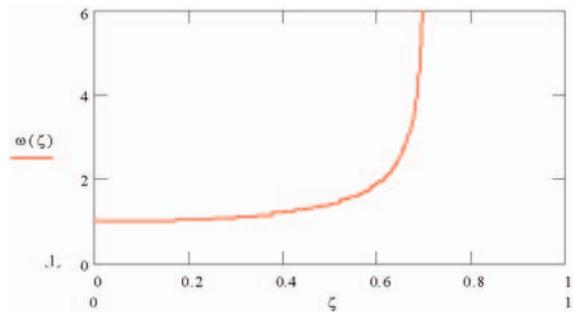
La funzione di trasferimento presenta dei massimi in dipendenza dall'entità del coefficiente di smorzamento, come mostrato in fig. A3.

In fig. A3 si nota come, all'aumentare del coefficiente di smorzamento l'entità del massimo diminuisca e la sua posizione si sposti verso valori maggiori di  $\omega$ . Dalla soluzione dell'equazione dell'oscillatore noi sappiamo che per  $\xi=1$  la componente oscillante scompare, ed il sistema ha soluzioni esponenziali. Sicuramente in questo caso il valore della funzione di trasferimento non eccede il riferimento. Dall'esame della fig. A3 sembra dover esistere un valore per il quale la risposta del sistema non eccede il valore di riferimento anche per  $\xi < 1$ . Il coefficiente di smorzamento per il quale questo non succede è quello che non ha massimi se non all'infinito.

Derivando la 3.16 rispetto ad  $\omega$  ed uguagliandola a 0 otteniamo la posizione dei massimi in funzione del coefficiente di smorzamento in unità  $\omega$ :

$$\omega(\xi) = \sqrt{\frac{1}{1-2\xi^2}}$$

che mette in evidenza come il primo valore di  $\xi$  per il quale la funzione di trasferimento non ha massimi (tranne che all'infinito) sia  $1/\sqrt{2}$ .



**Figura A4** La posizione dei massimi (ordinate) in funzione del coefficiente di smorzamento (ascisse). La funzione ha un asintoto verticale per  $\xi=1/\sqrt{2}$ .

### A2 Determinazione sperimentale del coefficiente di smorzamento

Esiste una semplice misura effettuabile sul campo per la determinazione del coefficiente di smorzamento semplicemente osservando le oscillazioni di un sismografo o di un geofono. La misura prescinde dal modo in cui il

sismografo è stato eccitato e dal tipo di trasduttore utilizzato (purché sia lineare, naturalmente!). Dalla 3.6 abbiamo visto come la risposta di un sistema del secondo ordine sia rappresentabile con un esponenziale decrescente per una funzione goniometrica. Se deriviamo una risposta di questo tipo otteniamo ancora un andamento descrivibile come prodotto di una funzione goniometrica dello stesso periodo per un esponenziale con lo stesso esponente. Questo ci serve per giustificare il fatto che il metodo che stiamo per descrivere funziona sia per i pendoli che per i geofoni. La 3.6 può essere riscritta come:

$$Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (A2.1)$$

rispetto alla 3.6 abbiamo rimosso il termine continuo (che non influenza l'andamento temporale) e inglobato le costanti in un unico termine A. La presenza del termine oscillante di pulsazione  $\omega_d$  ci permette di campionare l'esponenziale decrescente ad intervalli regolari guardando i massimi (e minimi) locali della funzione, che distano tra loro di un semiperiodo  $T/2 = \pi/\omega_d$ . Il rapporto tra un massimo (minimo)  $M(t)$  ed il minimo (massimo) successivo  $M(t+T/2)$  è dato da:

$$\frac{M(t)}{M\left(t + \frac{T}{2}\right)} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n\left(t + \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\right)}} = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (A2.2)$$

dove è stata usata la 3.7 che lega la pulsazione smorzata  $\omega_d$  alla pulsazione naturale.

È da notare come la differenza tra i due massimi consecutivi venga a dipendere esclusivamente dal coefficiente di smorzamento. Quando  $\xi=0.707$   $M(t)/M(t+T/2)=23.1$ .

Ponendo  $\Delta = \ln(M(t)/M(t+T/2))$  si ha:

$$\xi = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 + \pi^2}} \quad (A2.3)$$

### A3. Relazione tra la costante del generatore in un trasduttore di velocità elettromagnetico e la CDR (critical damping resistor)

La 6.5.8 è una relazione valida per ogni geofono dove vengono legate la resistenza per

ottenere lo smorzamento critico e la costante del generatore del trasduttore elettromagnetico. Immaginiamo di eccitare il geofono con un gradino unitario. Questo equivale ad operare sulla molla il lavoro:

$$L = \int_0^1 -kx dx \quad (A3.1)$$

Tutta l'energia immagazzinata nella molla deve essere uguale all'energia che si dissiperà nella resistenza (l'energia è la potenza ( $V^2/R$ ) per il tempo):

$$L = \int_0^\infty \frac{1}{R} \left( G \frac{d}{dt} x(t) \right)^2 dt \quad (A3.2)$$

Queste considerazioni debbono essere effettuate nella condizione di smorzamento critico, cioè  $\xi \rightarrow 1$ . Le A3.1 e A3.2 possono essere uguagliate sostituendo al posto della  $x(t)$  il valore dato dalla (2.6), ed utilizzando per  $k$  il valore desunto dalla (2.3) ottenendo:

$$L = \int_0^1 \omega_n^2 m \cdot x dx = \omega_n^2 \frac{m}{2} \quad (A3.3)$$

$$L = \int_0^\infty \frac{G^2}{R} \left( \frac{d}{dt} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arctan\left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi \omega_n}\right)\right)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \omega_n e^{-\xi\omega_n t} \right) dt = \frac{G^2}{4R} \omega_n \quad (A3.4)$$

E uguagliando i risultati per i due diversi valori di  $L$  (A3.5)

$$\frac{G^2}{4R} \omega_n = \omega_n^2 \frac{m}{2} \quad (A3.5)$$

otteniamo la relazione che lega la costante del generatore alla resistenza di smorzamento critico:

$$G = \sqrt{2R\omega_n m} \quad (A3.6)$$

#### A4. Coefficiente di generazione e coefficiente motore

In tutte le considerazioni effettuate finora riguardanti i trasduttori elettromagnetici si è sottintesa l'uguaglianza del coefficiente di generazione:

$$V = b \cdot v \quad \begin{array}{l} V = \text{tensione} \\ b = \text{coefficiente generatore} \\ v = \text{velocità} \end{array} \quad (\text{A4.1})$$

e del coefficiente motore:

$$f = a \cdot I \quad \begin{array}{l} f = \text{forza} \\ a = \text{coefficiente motore} \\ I = \text{corrente} \end{array} \quad (\text{A4.2})$$

Qui viene data una semplice giustificazione di questa uguaglianza: La scrittura dimensionale delle A4.1 e A4.2:

$$\frac{[l][m]}{[t]^2} = [a][A] \quad \frac{[l]^2[m]}{[A][t]^3} = [b] \frac{[l]}{[t]}$$

mostra già che i due coefficienti hanno le stesse dimensioni:

$$\frac{[l][m]}{[t]^2[A]} = [a] = [b]$$

Se immaginiamo di collegare il dispositivo ad un generatore di tensione e di applicare un carico meccanico sulla parte mobile ci aspettiamo che la potenza elettrica  $V \cdot I$  eguagli la potenza meccanica  $f \cdot v$ .

Combinando le A4.1 con le A4.2 otteniamo:

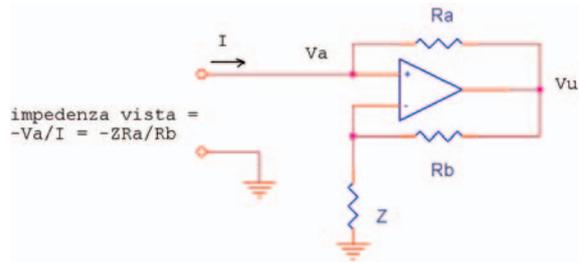
$$I \cdot V = \frac{f}{a} b \cdot v \quad (\text{A4.3})$$

La A4.2 è vera soltanto se  $a=b$

#### A5. Resistenze negative

La resistenza negativa è un singolare elemento circuitale con un comportamento apparentemente "surreale". Se mettiamo una resistenza  $R$  in serie ad una resistenza  $-R$ , otteniamo

una resistenza nulla; se mettiamo  $R$  in parallelo a  $-R$  otteniamo una resistenza infinita. Naturalmente questo non può essere ottenuto con un componente discreto, ma con un circuito elettronico. La resistenza negativa che descriviamo fa parte di una famiglia di circuiti chiamati NIC (*negative impedance converters*), la cui semplice rappresentazione è data in fig. A5.



**Figura A5** Schema di un circuito NIC (*Negative Impedance Converter*).

L'impedenza presentata ai morsetti del circuito si comporta come l'impedenza  $Z$  cambiata di segno. È facile giustificare questo comportamento. Le equazioni che descrivono il circuito di fig. A5 sono:

$$\begin{cases} V_u = \frac{R_b + Z}{Z} V_a \\ V_a - V_u = I \cdot R_a \end{cases} \quad (\text{A5.1})$$

La prima descrive il circuito amplificatore non invertente, il cui guadagno è regolato da  $R_b$  e  $Z$ ; la seconda descrive la corrente che corre nel morsetto di ingresso, e che è determinata solo da  $R_a$  e dalla differenza  $V_a - V_u$ . Risolvendo la seconda equazione rispetto  $V_u$ , ed uguagliando otteniamo:

$$\frac{R_b + Z}{Z} V_a = V_a - I \cdot R_a \Rightarrow \frac{V_a}{I} = -Z \frac{R_a}{R_b} \quad (\text{A5.2})$$

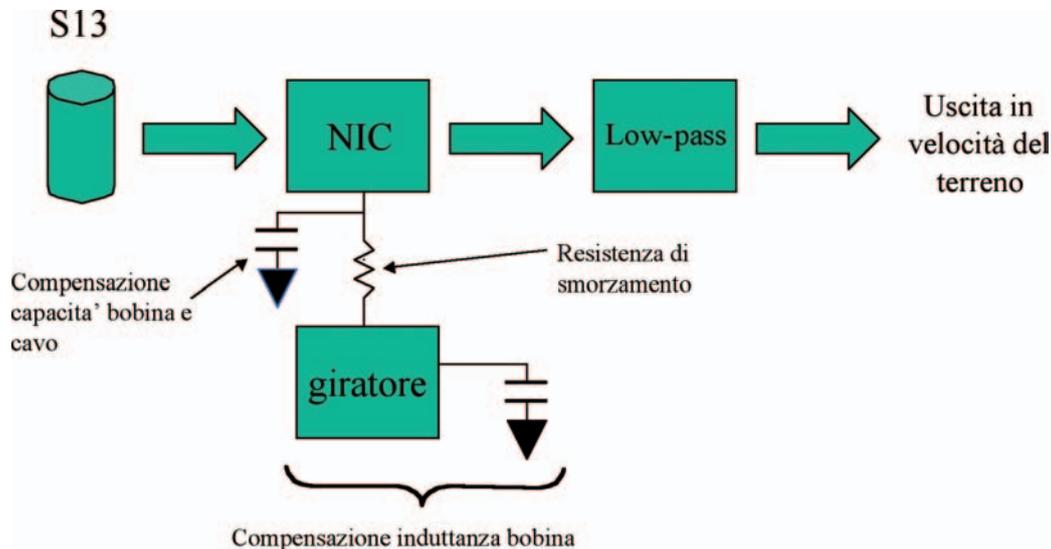
che mostra come il rapporto tensione/corrente dell'ingresso sia proporzionale all'impedenza  $Z$  cambiata di segno.

#### A6. Il metodo di Lippmann applicato all' S13

Descriviamo un esperimento condotto applicando il metodo di Lippman al sensore S13, ampiamente descritto in precedenza. La figura

seguinte (fig. A6\_1) illustra lo schema di principio dell'elettronica realizzata. Il NIC (*Negative Impedance Converter*, vedi paragrafo precedente) è collegato ad una rete di compensazione che comprende la resistenza di smorzamento, la capacità del cavo e l'induttanza della bobina.

essere condotta praticamente ovunque. È ovvio che il requisito tassativo è che il sensore sia lineare. La fig. A6\_2 mostra i diagrammi di risposta in frequenza di un S13 non modificato (sinistra) e dello stesso strumento modificato secondo il metodo di Lippmann.



**Figura A6\_1** Schema a blocchi dell'estensore di banda di tipo Lippman applicato all'S13.

Il condensatore di compensazione annulla la capacità del cavo e permette al circuito di essere stabile per lunghi cavi di collegamenti. La capacità di questo condensatore deve essere uguale a quella presentata dallo strumento a valle del cavo di collegamento. Il giratore ha come effetto di simulare il reciproco dell'impedenza che gli viene presentata, e, utilizzando un condensatore, permette di riprodurre il comportamento dell'induttanza della bobina del sensore. Il motivo del filtro passa-basso (un polo) è spiegato nel paragrafo 9.

L'S13 è stato provato laboratorio sia da solo che con l'allargatore di banda, alimentando la bobina di calibrazione con una sorgente di corrente sinusoidale ed effettuando prove sul ventaglio di frequenze di interesse. L'uso di un generatore di corrente permette di trascurare i valori di resistenza e di induttanza della bobina di calibrazione e corrisponde direttamente ad una forza sulla massa, quindi ad una eccitazione in accelerazione.

Questo è un buon metodo per provare la risposta di un sismografo in un ambiente rumoroso. Se il sensore viene eccitato con un tono puro ed il segnale viene acquisito con un filtro passa-banda alla stessa frequenza, il rumore ambientale viene fortemente attenuato; con un adeguato tempo di integrazione, la misura può

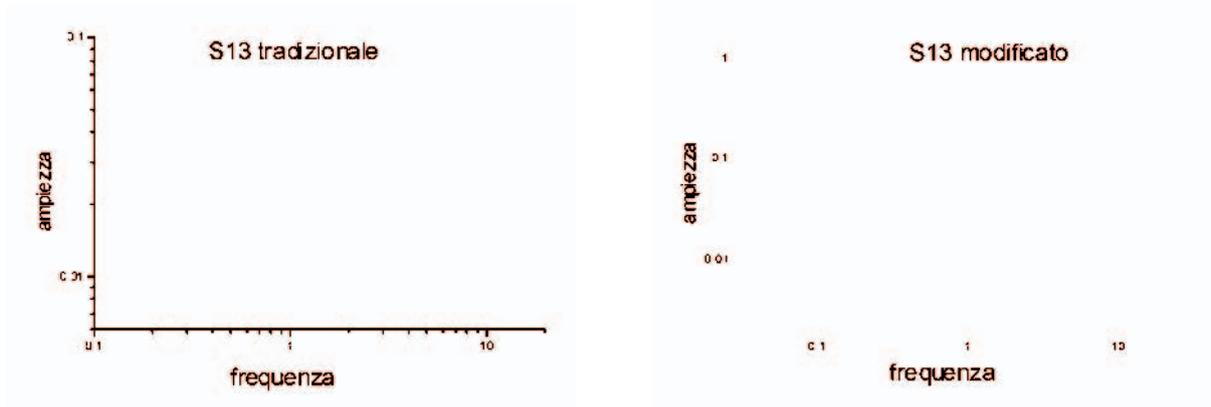
Come si interpretano i due diagrammi? La risposta dell'S13 non modificato coincide con quella riportata in fig. 5: un geofono eccitato da un segnale di accelerazione ( $G_a(f)$ ). La curva a destra è molto simile, con la frequenza di angolo traslata verso le basse frequenze (confronta con la fig. 18); nel diagramma misurato per l'S13 modificato viene mostrata soltanto la parte ad alta frequenza di una curva con un massimo a 50 secondi.

Lo strumento modificato è stato collaudato confrontandolo con un STS 1, presso l'Osservatorio de L'Aquila. La fig. A6\_3 mostra il terremoto peruviano del 7 luglio 2001 visto dall'S13 e da un STS1-VBB. Le tracce a sinistra mostrano 3 ore di registrazione, quelle a destra il primo arrivo.

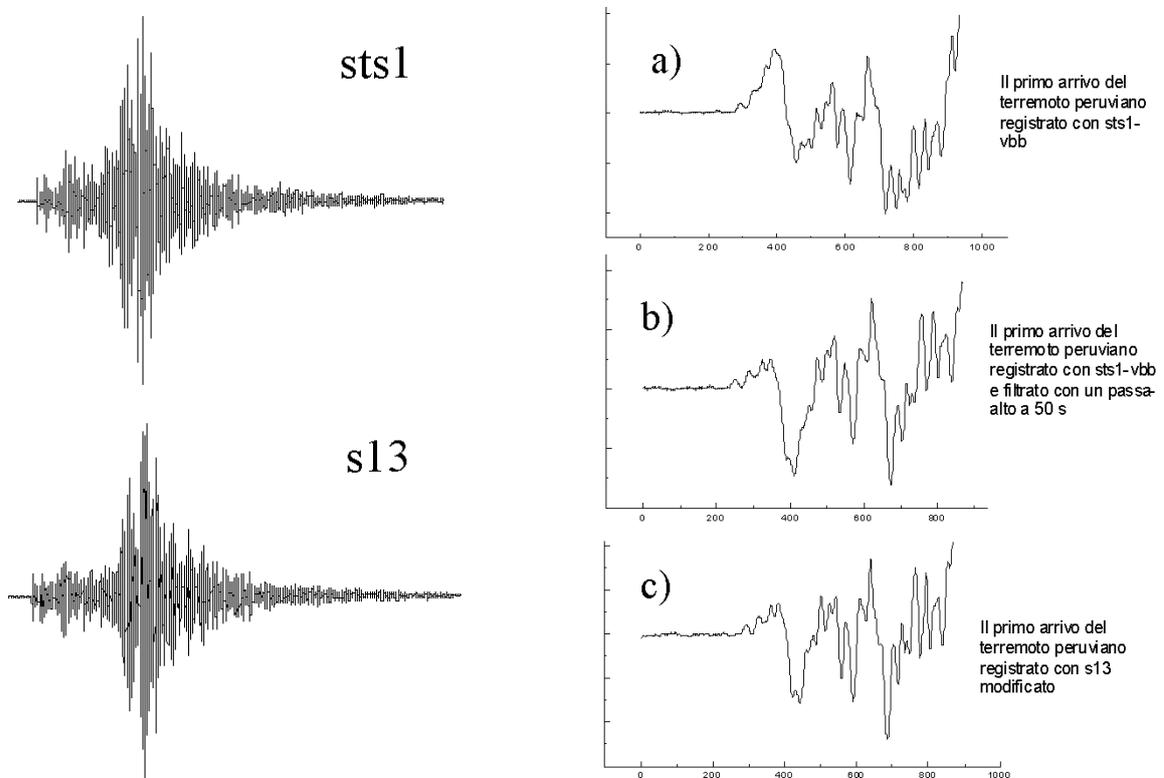
Il sismogramma *a*) (fig. A6\_3) proveniente dal sismografo sts1 è stato manipolato attraverso un filtro passa-alto con un taglio a 50 s in modo che la sua uscita approssimasse quella dell'S13 modificato. Il risultato (sismogramma *b*) è immediatamente confrontabile con il sismogramma prodotto dall'S13 modificato, e già dall'aspetto i due sismogrammi appaiono simili.

Come si interpreta la somiglianza tra due sismogrammi?

Prima una piccola digressione. Se costruiamo un sismografo e ne conosciamo per-



**Figura A6\_2** Risposta di un s13 tradizionale ed a banda allargata (taglio a 50 s) ad una eccitazione in accelerazione.



**Figura A6\_3** Il terremoto peruviano del 7 luglio 2001 visto dall'S13 a banda allargata e da un STS1-VBB. A sinistra l'intero evento, a destra il primo arrivo (campionamento 20 samples/s).

fettamente la funzione di trasferimento, potremo sentirci autorizzati ad affermare: qualunque cosa succeda basta una buona deconvoluzione per garantirci una conoscenza completa dell'osservabile. Questo sarebbe vero se non esistesse un rumore intrinseco nella misura (rumore termico nella meccanica dello strumento, rumore elettrico, quantizzazione del nostro convertitore analogico-digitale, granulosità della nostra rappresentazione numerica del segnale). Deconvolvere un pendolo che risuona ad un secondo per vedere una marea terrestre non è

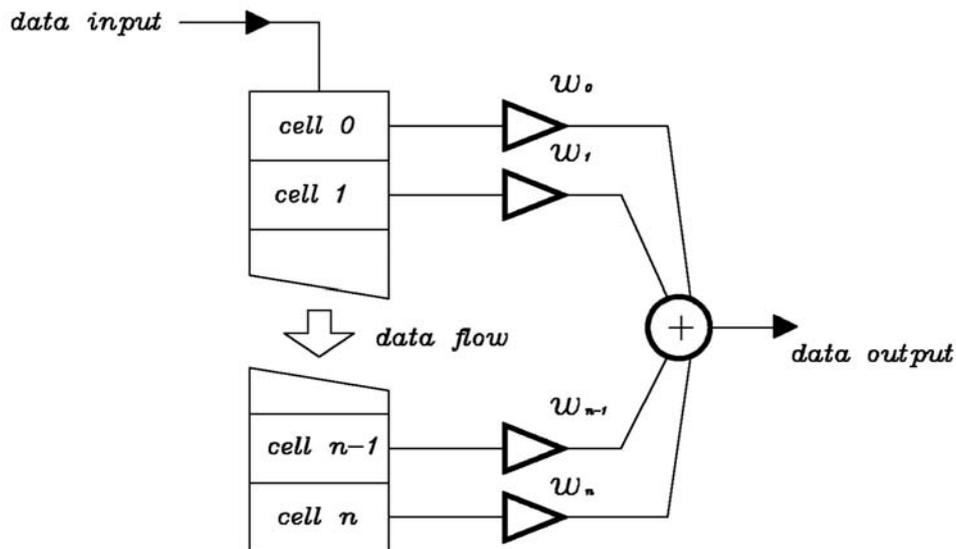
semplicemente possibile perché il segnale della marea (teoricamente presente) è sommerso dal rumore della misura. È questo che ci spinge a costruire strumenti in grado di garantire all'origine una risposta che sposi quanto meglio possibile il fenomeno da misurare.

Due sismogrammi sono simili quando è possibile trovare una trasformazione lineare che possa trasformare un sismogramma nell'altro entro un tollerabile margine di errore. Per quanto detto prima questa operazione non sarebbe possibile tra un STS1 ed un S13, ma possiamo prova-

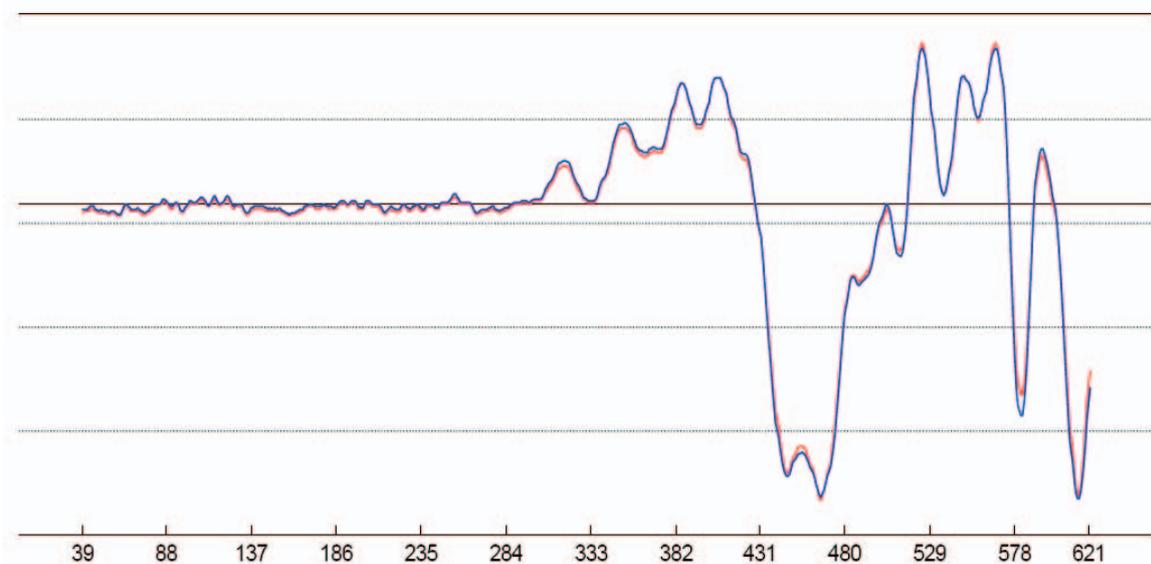
re un confronto tra l'STS1 e l'S13 modificato.

Un filtro FIR (Finite Impulse Response) è un filtro digitale lineare. Il suo funzionamento è schematizzato nella figura seguente (fig. A6\_4):

vi allo stesso evento provenienti dai sismografi da paragonare, converge possiamo affermare che, a meno della funzione di trasferimento, i due sismografi sono uguali. La fig. A6\_5 mostra



**Figura A6\_4** Schema di un filtro FIR (*Finite Impulse Response*).



**Figura A6\_5** Paragone tra S13 trattato con il metodo di Lippman (traccia rossa) ed il segnale dell'STS1 filtrato (traccia blu).

I dati provenienti dal fenomeno, scalati nel tempo, vengono sommati con pesi opportuni e trasferiti in uscita. Esiste un metodo che permette di calcolare i pesi  $w_n$  di un filtro a partire dal segnale di ingresso e dal segnale di uscita: l'algoritmo LMS (Widrow et al, 1975). Si tratta di un metodo di discesa lungo il gradiente dell'errore tra il segnale prodotto dal filtro ed il segnale voluto. Se il metodo, applicato ai segnali relativi-

il risultato ottenuto applicando il metodo LMS per paragonare le curve b) e c) di fig. A6\_3.

Il metodo è stato eseguito su un numero ristretto di campioni (1500) con un filtro relativamente corto (50 passi). Le tracce riportate (in blu il segnale dell'STS1 ed in rosso il segnale dell'S13 filtrato con l'algoritmo LMS) mostrano un accordo più che buono.

## A7. Cenni sulla teoria dei filtri lineari

La discussione della risposta di un sismografo con il linguaggio della teoria dei sistemi richiede che siano effettuati alcuni richiami sui sistemi lineari invarianti nel tempo. Nel caso dei sismografi (che utilizzano sospensioni elastiche) la risposta meccanica delle molle svolge un ruolo determinante: è importante, quindi che le ampiezze delle eccitazioni siano piccole, cioè nell'intervallo elastico lineare

### Fondamenti

La decomposizione di un segnale di tempo  $x(t)$  in ampiezza fase viene chiamata trasformata di Fourier  $f(t) \Leftrightarrow F(j\omega)$

Essa è definita come:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (A7.1)$$

La trasformata inversa è:

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (A7.2)$$

L'estensione nel piano della frequenza complessa viene descritta tramite la trasformata di Laplace  $f(t) \Leftrightarrow F(s)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (A7.3)$$

e la sua inversa

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{st} ds \quad (A7.4)$$

che coincidono con la (2.1) e la (2.2) nel caso in cui il fattore di smorzamento  $e^{\sigma t} = 0$   
Alcune regole basilari sono:

la differenziazione

$$\frac{d}{dt} x(t) \Leftrightarrow j\omega \cdot X(j\omega) \Leftrightarrow s \cdot X(s) \quad (A7.5)$$

l'integrazione

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \cdot X(s) \quad (A7.6)$$

Time shift

$$x(t - a) \Leftrightarrow X(j\omega) \cdot e^{-j\omega a} \Leftrightarrow X(s) \cdot e^{-sa} \quad (A7.7)$$

la convoluzione

$$x(t) * h(t) \Leftrightarrow X(j\omega) \cdot H(j\omega) \Leftrightarrow X(s) \cdot H(s) \quad (A7.8)$$

### Funzione di trasferimento

Intendiamo come sistema un dispositivo in grado di operare su un segnale in ingresso producendo un segnale in uscita. In un sistema lineare invariante nel tempo il calcolo della funzione di uscita a partire dalla funzione in ingresso si effettua con la convoluzione della funzione in ingresso con la funzione di trasferimento del sistema:

$$y(t) = x(t) * f(t) = \int_0^{\infty} x(t') \cdot f(t - t') dt' \quad (A7.9)$$

$$Y(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{X(j\omega)} \Leftrightarrow \frac{F(s)}{X(s)} = Y(s) \quad (A7.10)$$

Se scegliamo come segnale d'ingresso la funzione delta Dirac

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt$$

che è definita  $x(t)=0$  per tutti i tempi, tranne per  $t=0$ , dove  $x(t)=\infty$ , le corrispondenti trasformate di Fourier e Laplace sono:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt \quad (A7.11)$$

- La funzione della risposta in frequenza  $F(j\omega)$  è definita come trasformata di Fourier del segnale di uscita diviso la trasformata di Fourier del segnale d'ingresso ed è quindi la trasformata di Fourier della risposta d'impulso  $f(t)$ .

- La funzione di trasferimento  $F(s)$  è definita come trasformata di Laplace del segnale di uscita diviso la trasformata di Laplace del segnale d'ingresso ed è quindi la trasformata di Laplace della risposta d'impulso  $f(t)$ .

## Poli e zeri

Generalmente la funzione di trasferimento di un sistema lineare LTI può essere rappresentato nel piano complesso ( $\sigma, j\omega$ ) come moltiplicazione delle lunghezze dei vettori - dalla posizione degli zeri ( $s_0$ ) al punto  $j\omega$  sull'asse immaginario - diviso il prodotto delle lunghezze dei vettori posizione dei poli al punto  $j\omega$  sull'asse immaginario.

$$F(s) = \frac{-b_L \cdot \prod_{k=1}^L (s - s_{0k})}{a_N \cdot \prod_{k=1}^N (s - s_{pk})} \quad (\text{A7.12})$$

Quindi tutte le proprietà di un filtro lineare LTI possono essere interpretati secondo la posizione dei poli e degli zeri nel piano  $s$ . Valgono le seguenti regole:

- Per sistemi causali stabili tutti i poli della funzione di trasferimento devono essere posizionati nel lato sinistro del piano complesso, cioè  $\sigma$  deve essere negativo per non far crescere la risposta di impulso all'infinito.
- La posizione del polo (left/right halfspace) determina le proprietà della fase.
- Il raggio lunghezza del vettore dall'origine al polo) determina la frequenza del filtro (nel caso del sismometro la frequenza naturale del pendolo/geofono).
- L'angolo di tale vettore rappresenta lo smorzamento.
- Ogni polo diminuisce la amplitudine portion di 20 dB/decade or 6 dB/octave.
- Uno zero invece aumenta la amplitudine portion di 20 dB/decade or 6 dB/octave.

## A8. Sismometro come filtro lineare: distribuzione poli-zeri di un sismometro

Ritornando alla domanda principale "che cosa misura un sismografo?", cerchiamo di precisarla riformulandola: "Come reagisce un sismometro nei vari ad una sollecitazione qualsiasi del terreno". Per rispondere a questa domanda richiamiamo i principi dei sistemi lineari (vedi par. 2). Ritorniamo alla formula (5)

$$X(s) \cdot F(s) = Y(s)$$

dove

$X(s)$  = il movimento del terreno in spostamento

$D(s)$ , velocità  $V(s)$  oppure accelerazione  $A(s)$

$F(s)$  = la funzione di trasferimento del sismometro come pendolo  $P(s)$  oppure geofono  $G(s)$

$Y(s)$  = il sismogramma (non considerando il sistema di acquisizione, preamplificatori ecc.)

I filtri del pendolo  $P(s)$  e del geofono  $G(s)$  sono entrambi sistemi lineari del secondo ordine con due poli. Quindi la differenza della ripidità dei fianchi sopra e sotto la frequenza naturale si distinguono nel *log-log*-plot relativamente di 20 dB/decade oppure 2·6=12 dB/ottava (vedi par. 3). Decisivo per l'inclinazione assoluta dei fianchi della funzione di trasferimento in ampiezza è il numero degli zeri. Quindi plottiamo questa funzione di trasferimento in ampiezza  $F(s)$  per numeri diversi di zeri sia a) per il pendolo  $P(s)$ , sia b) per il geofono  $G(s)$ , con  $D(s)$ ,  $V(s)$  e  $A(s)$  come segnale d'ingresso.

Consideriamo p.e. come lo spostamento come input  $X(s)=D(s)=1$  e come filtro sismico il pendolo  $F(s)=P(s)$ , otteniamo la seguente trasformata Laplace (vedi par. 3):

$$Y(s) = P_D(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (\text{A7.13})$$

Mandiamo invece lo stesso segnale d'ingresso  $X(s)=D(s)=1$  a un geofono  $F(s)=G(s)$  l'uscita diventa

$$Y(s) = G_D(s) = \frac{s^3}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (\text{A7.14})$$

Invece considerando come segnale di ingresso la velocità del terreno, diminuisce all'uscita  $Y(s)$  il numero degli zeri di uno e quindi diventa

$$Y(s) = G_V(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (\text{A7.15})$$

I poli si calcolano in ogni caso, dalla soluzione dell'equazione caratteristica nel denominatore:

$$p_{1,2} = -\omega_0 \cdot (\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}) \quad (\text{A7.16})$$

- Valgono le regole elencate nel par. 3:
- Il raggio lunghezza del vettore dall'origine al polo) determina la frequenza del filtro (nel caso del sismometro la frequenza naturale del pendolo/geofono).
- L'angolo di tale vettore rappresenta lo smorzamento.

Vediamo allora i poli e gli zeri nel caso degli ultimi esempi, pendolo/geofono con una frequenza naturale di  $1\text{ Hz}$  e uno smorzamento di  $\xi=0.707$ .

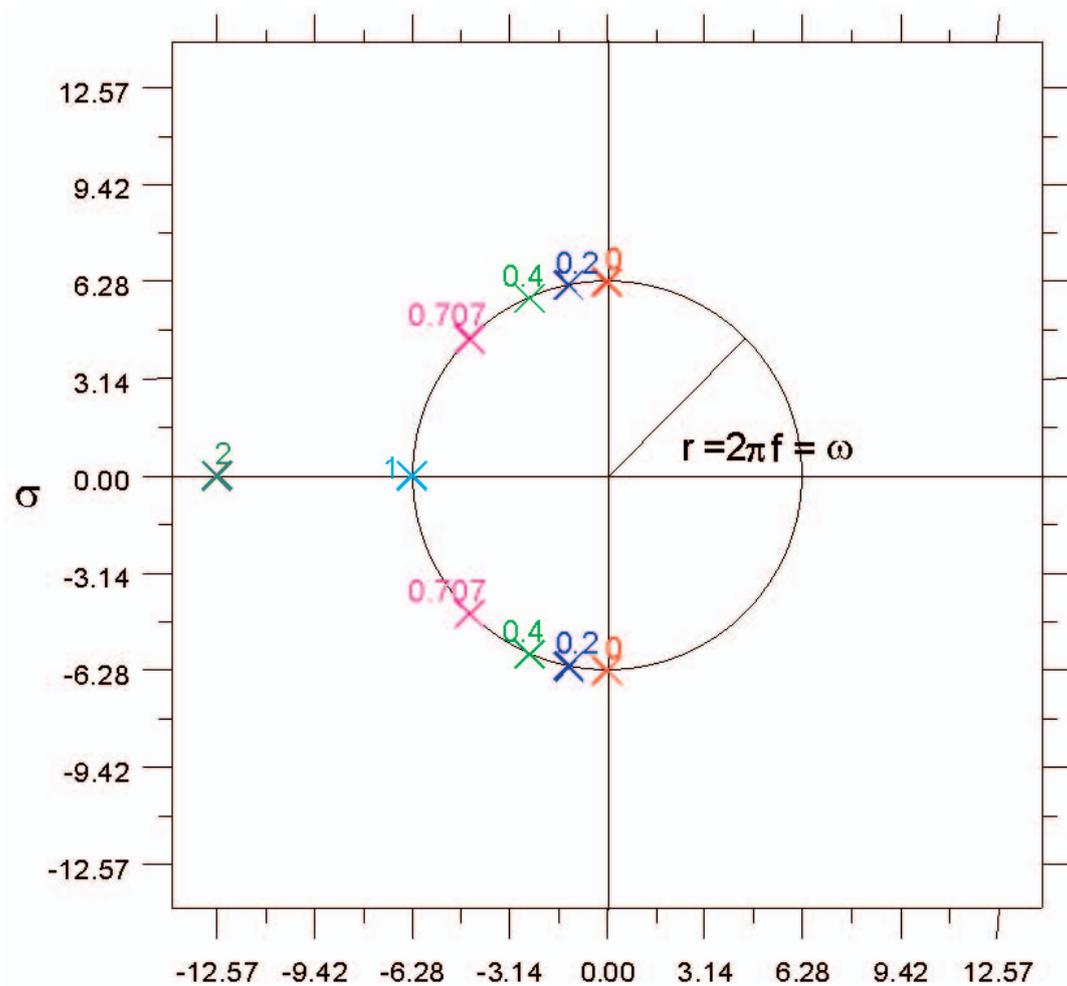
I poli sono quindi:

$$p_{1,2} = -2\pi \cdot 1 \cdot (0.707 \pm j\sqrt{1-0.707^2})$$

$$p_{1,2} = -4.4428 \pm j4.4428$$

### A9. Caratteristiche di alcuni sismografi commerciali

Gli strumenti marcati con \* (strumenti attivi con elettronica di feed-back) non sono completamente descritti da una coppia di poli ed una coppia di zeri. Benchè questa rappresentazione dia dei risultati accettabili nella pratica la descrizione completa di un sismografo a controreazione si arricchisce di altre singolarità dovute alla presenza di un'elettronica talvolta molto complessa.



**Figura A8** Diagramma poli-zeri per un sismometro a 1 Hz con diversi valori di smorzamento.

Sensore	Fornitore	Consumo	Eigenfreq. corner freq.	Periodo	Sensibilità	Zeri	Poli
STS-1	* Streckeisen	120mA@15V	0.00277 Hz - 5 Hz	360 s	2400 Vs/m	due a zero	-0.001234 ±j0.001234
STS-2	* Kinometrics	50 mA@12V	0.0083 Hz - 20 Hz	120 s	1500 Vs/m	due a zero	-0.037/±j0.037 -251.3/±0.000 -131.0/±467.3
CMG-1T (OBS)	* Guralp	22 mA@12V	0.00277 Hz - 20 Hz	360 s	3200 Vs/m	due a zero	-0.001964 ±j0.001964
CMG-3T	* Guralp	100 mA@12V	0.0083 Hz - 50 Hz	120 s	1500 Vs/m	due a zero	-0.037/±j0.037
CMG-3ESP Compact	Guralp *	100 mA@12V	0.033 Hz - 100 Hz	30 s	2000 Vs/m	due a zero	-0.147/±j0.147
CMG-40T	Guralp	50 mA@12V	0.033 Hz - 100 Hz	30 s	800 Vs/m	due a zero	-0.148/±j0.148
Trillium 40*	Nanometrics	50 mA@12V	0.025 Hz - 50 Hz	40 s	1500 Vs/m	due a zero	-0.111/±j0.111
KS-2000/M* KS-2000/BH	Teledyne Geotech	100 mA@12V	0.0083 Hz - 50 Hz	120 s	2000 Vs/m	due a zero	-0.037/±j0.037
KS-54000 * KS-1	Teledyne Geotech	100 mA@24V	0.003 Hz - 5.0 Hz	333 s	2400 Vs/m	due a zero	-0.001333 ±j0.001333
LE 1D-1s	* Lennartz Electronic	3 mA@12V	1.0 Hz - 80 Hz	1 s	400 Vs/m	tre a zero	-4.21 /±j4.66 -2.105/0.00j
LE 3D-1s LE 3D-BH	* Lennartz Electronic	8 mA@12V	1.0 Hz - 80 Hz	1 s	400 Vs/m	tre a zero	-4.21 /±j4.66 -2.105/0.00j
LE 3D-5s	* Lennartz Electronic	10 mA@12V	0.2 Hz - 40 Hz	5 s	400 Vs/m	tre a zero	-0.885/±j0.887 -0.427/0.00j
LE 3D-20s	* Lennartz Electronic	50-100 mA @12V	0.05Hz -40Hz	20s	1000 Vs/m	tre a zero	-0.22/±0.235 -0.23/0.00j
S-13 S-13J GS-13	Teledyne Geotech	Passivo	1.0 Hz [.75-1.1 Hz]	1 s	629 Vs/m 344 Vs/m 2180 Vs/m	due a zero	-4.443/±j4.443
SS-1	Kinometrics	Passivo	1.0 Hz	1 s	345 Vs/m	due a zero	-4.443/±j4.443
L-4c/3D	Mark Products	Passivo	1.0 Hz	1 s	171 Vs/m	due a zero	-4.443/±j4.443
L-22	Mark Products	Passivo	2.0 Hz	0.5 s	88 Vs/m	due a zero	-8.886/±j8.886
L-28	Mark Products	Passivo	4.5 Hz	0.222	30.4 Vs/m	due a zero	-19.99/±j19.99
L-40	Mark Products	Passivo	4.0 Hz	0.025s	22.34 Vs/m	due a zero	-177.2/±j177.2



**Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia**  
Via di Vigna Murata, 605 - 00143 Roma - Italy  
[www.ingv.it](http://www.ingv.it)